Petit résumé de topologie induite

Résumé

Sur un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$, on peut définir des ouverts, des fermés, des bornés... C'est ce que l'on appelle la *topologie* de $(E, \|.\|)$, et c'est le minimum dont on a besoin pour utiliser les outils les plus puissants de l'analyse mathématique : les fonctions continues et les suites convergentes.

Mais il existe des ensembles intéressants, sur lesquels on aimerait faire de l'analyse, mais qui n'ont pas le bon goût d'être des espaces vectoriels : par exemple, la surface de la Terre, ou d'ailleurs n'importe quelle surface dans $\mathbb{R}^3$. En physique théorique, on est amenés à étudier des espaces courbes à 4 dimensions (l'espace temps) [1]

La *topologie induite* nous donne une façon de définir une topologie (c'est à dire des ouverts et des fermés) sur n'importe quel sous-espace d'un e.v.n.

Toutes les notions topologiques, à la racine, dépendent des *boules ouvertes* dans $(E, \|.\|)$: la boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des vecteurs de E dont la distance à a est plus petite que r, et cette distance est calculée avec $\|.\|$. Par conséquent, la notion de topologie dépend entièrement de la possibilité de calculer la distance entre deux points.

Sur un espace vectoriel, la distance entre deux point est calculée à l'aide d'une norme, autrement dit une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie

1. $N(x) = 0 \iff x = 0_E$
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. Pour tous $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

On définit alors la distance entre deux vecteurs $x, y \in E$ par $d(x, y) = N(x - y)$.

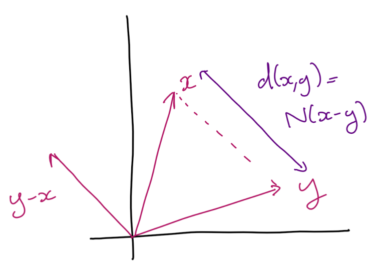

FIGURE 1 – Calcul de distance dans un e.v.n.

Remarquons que pour définir une norme sur un ensemble X, il faut que cet ensemble soit un espace vectoriel : la première propriété nécessite un vecteur nul, les deux autres reposent sur la possibilité de multiplier un élément de X par un scalaire et de sommer deux éléments de X respectivement.

1. voire 11, ou 26 en théorie des cordes.

Si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel d'un e.v.n. (E, N), la norme sur E restreinte à F définit une norme sur F, et donc, on peut sans problème faire de la topologie sur F. Mais si $X \subset E$ n'est pas un sous-espace vectoriel, alors l'application $N_{|X}$ n'est pas une norme sur X : on ne peut pas vérifier les axiomes puisque, étant donné $x \in X$, il n'est pas certain que $\lambda x \in X$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par exemple, si $X = S(0,1)$ est la surface de la sphère dans $(\mathbb{R}^3, \|.\|_2)$, on a $x = (1,0,0) \in X$, $y = (0,1,0) \in X$ mais $2x = (2,0,0) \notin X$ et $x + y = (1,1,0) \notin X$. Ce sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on peut donc calculer $\|2x\|_2$ et $\|x+y\|_2$, mais on est sortis du "cadre" de X. C'est fâcheux si on souhaite, par exemple, étudier la continuité d'une fonction qui n'est définie que sur X.

$\rightsquigarrow$ Comment définir une notion de topologie sur X sans avoir à sortir de X ?

La clé, c'est de remarquer que pour faire de la topologie, on n'a pas vraiment besoin de la norme de points individuels de X, mais juste de la *distance* entre deux points. Mathématiquement, on formalise la notion de distance ainsi : une distance sur un ensemble X, c'est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Pour tous $x, y \in X$, $d(x,y) = d(y,x)$
3. Pour tous $x, y, z \in X$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Si on a défini une distance sur un ensemble X, on dit que (X, d) est un *espace métrique*. On peut alors faire de la topologie sur X :

Définition 1.
- *Pour $a \in X$ et $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble*
$$B_X(a,r) = \{x \in X, d(x,a) < r\}$$
On récupère de même les boules fermées et les sphères.
- *Un sous-ensemble $V \subset X$ est un voisinage de $a \in X$ s'il existe $r > 0$ tel que $B_X(a,r) \subset V$, autrement dit si V contient tous les points suffisamments voisins de a.*
- *Un sous-ensemble $U \subset X$ est ouvert s'il est voisinage de tous ses points :*
$$\forall x \in U, \exists r > 0, \text{ t.q. } B_X(a,r) \subset U$$
On récupère aussi la notion d'intérieur d'un sous-ensemble de X, et la propriété qu'une union quelconque d'ouverts de X est un ouvert de X, ainsi qu'une intersection finie d'ouverts de X (Exercice !).
- *Un sous-ensemble $F \subset X$ est fermé si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.*
On récupère aussi la notion d'adhérence d'un sous-ensemble de X, et la propriété qu'une union finie de fermés de X est un fermé de X, ainsi qu'une intersection quelconque de fermés de X (Exercice !).
- *Une suite $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ de points de X converge vers $\ell \in X$ si $d(x_n, \ell) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ dans $\mathbb{R}$.*
On récupère aussi la notion de suite de Cauchy, et la caractérisation des fermés par les suites.

Remarque 2. La notion de distance, contrairement à celle de norme, n'utilise pas les propriétés des espaces vectoriels : elle est plus générale. D'ailleurs, beaucoup d'espaces métriques ne sont pas des espaces vectoriels. Mais on peut vérifier [2] que sur un espace vectoriel normé (E, N), l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+, (x,y) \mapsto N(x-y)$ est bien une distance sur E.

Voyons en quoi cela nous aide. Soit $X \subset E$ un sous-ensemble de E quelconque. On peut définir une distance sur X en restreignant la distance sur E à X :

$$d_X : (x,y) \in X \times X \mapsto N(x-y)$$

2. Exercice !

et comme la définition d'une distance ne requiert pas que X un espace vectoriel, ceci fait bien de X un espace métrique, sur lequel on va pouvoir faire de la topologie, en utilisant la Définition 1.

Puisque X est inclus dans l'e.v.n. (E, N), la topologie de X va être "dictée" par celle de E. C'est pour cela qu'on l'appelle *topologie induite* sur X.

Qu'entend-on par "dictée" ? Cela signifie que les boules, ouverts et fermés sur X vont être des intersections de boules, ouverts et fermés de E avec X. Ainsi, en utilisant la définition 1, on voit que, pour $a \in X$ et $r > 0$,

$$B_X(a, r) = \{x \in X, d_X(a, x) < r\} = \{x \in X, N(x - a) < r\} = B_E(a, r) \cap X,$$

où $B_E(a, r)$ est la boule "normale" sur E.

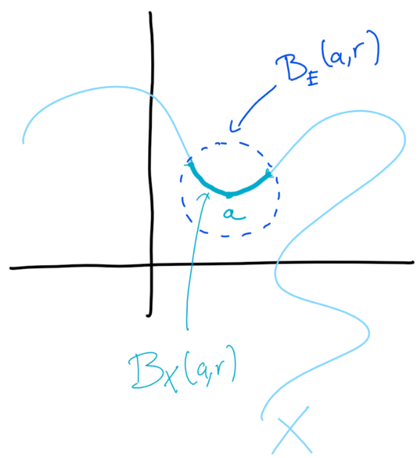

Figure 2 – Si X est une courbe de $\mathbb{R}^2$, les boules ouvertes de X sont des "intervalles ouverts" sur X

Dans le même ordre d'idées, on a la caractérisation suivante des ouverts et fermés de X :

Proposition 3. *Soit $A \subset X$, alors*

- *A est un ouvert de X (sous-entendu, pour la topologie induite : on ne le précise plus par la suite) si, et seulement si, il existe un ouvert U de (E, N) tel que* $\boxed{A = U \cap X}$
- *A est un fermé de X (même remarque) si, et seulement si, il existe un fermé F de (E, N) tel que* $\boxed{A = F \cap X}$

Démonstration. Preuve

- Commençons par les ouverts. On procède par double implication :

  $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \subset X$ un ouvert de X, au sens de la définition 1. On cherche un ouvert U de E tel que $A = U \cap X$.
  Puisque A est ouvert dans X, pour tout $a \in A$, il existe $r_a > 0$ tel que $B_X(a, r_a) \subset A$. Mais alors, pour tout $a \in A$, $B_X(a, r_a) = B_E(a, r_a) \cap X$. Du coup, si on pose

  $$U = \bigcup_{a \in A} B_E(a, r_a),$$

  alors U est un ouvert de E (car c'est une union d'ouverts) et

  $$U \cap X = \left(\bigcup_{a \in A} B_E(a, r_a) \right) \cap X = \bigcup_{a \in A} (B_E(a, r_a) \cap X) = \bigcup_{a \in A} B_X(a, r_a) = A,$$

  comme requis.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons maintenant que $A \subset X$ soit l'intersection d'un ouvert U de E avec X. Montrons que A est un ouvert de X. Soit $a \in A = U \cap X$. Alors $a \in U$ qui est ouvert dans E, donc il existe $r_a > 0$ tel que $B_E(a, r_a) \subset U$. Mais alors

$$B_X(a, r_a) = B_E(a, r_a) \cap X \subset U \cap X = A$$

donc A est un voisinage de a dans X. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, A est bien un ouvert de X.

- Pour les fermés, il suffit de passer au complémentaire.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $A \subset X$ un fermé de X, alors $X \setminus A$ est un ouvert de X donc ,d'après ce qu'on vient de montrer, il existe un ouvert U de E tel que $X \setminus A = X \cap U$. Mais alors

$$\begin{aligned} A &= X \setminus (X \setminus A) = X \setminus (X \cap U) = X \cap (X \cap U)^c \\ &= \underbrace{(X \cap X^c)}_{\emptyset} \cup (X \cap U^c) \\ &= X \cap \underbrace{U^c}_{\text{fermé de } E} \end{aligned}$$

(ici, la notation ^{c} désigne le complémentaire *dans* E).

$\rightsquigarrow$ A est bien l'intersection d'un fermé de E avec X.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $A \subset X$ soit l'intersection d'un fermé F de E avec X. Montrons que A est un fermé de X. On utilise le fait que F^c est un ouvert de E, donc

$$X \setminus A = X \setminus (X \cap F) = X \cap (X \cap F)^c = X \cap \underbrace{F^c}_{\text{ouvert de } E}$$

donc $X \setminus A$ est un ouvert de X d'après ce qu'on a montré avant. $\square$

Remarque 4. Quand on fait de la topologie induite, il est important de préciser si on parle d'ouverts *de* X ou d'ouverts *de* E. En effet, pour n'importe quel $X \subset E$, X est un ouvert de X puisque

$$X = X \cap \underbrace{E}_{\text{ouvert de } E}$$

et c'est un fermé de X puisque

$$X = X \cap \underbrace{E}_{\text{fermé de } E}$$

$\rightsquigarrow$ X est toujours un ouvert *et* un fermé de X pour la topologie induite, même si X n'est pas nécessairement un ouvert ou un fermé de E (voir ci-dessous).

Tout cela marche très bien sur le papier, et permet effectivement de faire de la topologie sur toutes sortes d'espaces. Toutefois, cela a un prix, car les résultats peuvent être contre-intuitifs :

Exemple 5. Prenons quelques exemples dans $E = \mathbb{R}$:

1. Considérons la topologie induite sur $X = [0, 2[\subset \mathbb{R}$. Alors, par exemple, $[0, 1[$ est un ouvert de X (même si ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$), puisque

$$[0, 1[= \underbrace{]-1, 1[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}} \cap \underbrace{[0, 2[}_{X}$$

et par ailleurs, $[1, 2[$ est un fermé de X (même si ce n'est pas un fermé de $\mathbb{R}$), puisque

$$[1, 2[= \underbrace{[1, 3]}_{\text{fermé de } \mathbb{R}} \cap \underbrace{[0, 2[}_{X}$$

2. Plus bizarre, considérons la topologie induite sur $X = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\{k\}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$ (même si ce n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$) puisque

$$\{k\} = \underbrace{\left]k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}} \cap \mathbb{Z}$$

Mais du coup, pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, on peut écrire $A = \bigcup_{k \in A} \{k\}$ comme union (éventuellement infinie) d'ouverts de $\mathbb{Z}$. Donc A est un ouvert de $\mathbb{Z}$, quel que soit $A \subset \mathbb{Z}$.

Du coup, on a aussi que pour tout $A \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \setminus A \subset A$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$, donc A est un fermé de $\mathbb{Z}$.

$\rightsquigarrow$ Pour la topologie induite sur $\mathbb{Z}$, tous les sous-ensembles de $\mathbb{Z}$ sont à la fois ouverts et fermés.

Remarque : Plus généralement, on montre de la même façon que si $X \subset E$ est un sous-ensemble d'un e.v.n (E, N) tel que, pour la topologie induite, tous les singletons sont ouverts, alors tous les sous-ensembles de X sont à la fois ouverts et fermés.

C'est le cas notamment si X est un ensemble fini (voir TD) ou si tous les points de X sont à une certaine distance les uns des autres, c'es-à-dire :

$$\delta = \inf\{d(x, y), x, y \in X\} > 0, \text{ i.e. } \exists \delta > 0, \ \forall x, y \in X, d_X(x, y) \geq \delta.$$

comme par exemple $\mathbb{Z}$ (dans ce cas $\delta = 1$). On parle alors de topologie *discrète* sur X.