1 Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide MAJOREE (resp. MINOREE) a une BORNE SUPERIEURE (resp. INFERIEURE)

2 Toute suite de $\mathbb{R}$ CROISSANTE MAJOREE a une limite. Toute suite DECROISSANTE MINOREE a une limite

3 INTERVALLES EMBOITES : Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite d'intervalles emboîtés ($\forall n \geq 1 \quad I_{n+1} \subset I_n$), dont la longueur $(b_n - a_n)$ tend vers 0. Alors ces intervalles ont un unique point commun c :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_n = \{c\} \quad \text{et} \quad \lim(a_n) = \lim(b_n) = c$$

4 SUITES DE CAUCHY : Si (x_n) est une suite de réels

a) (x_n) de Cauchy $\Longleftrightarrow$ (x_n) converge

b) (x_n) converge $\Longrightarrow$ (x_n) bornée.

5 Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite OUVERTE

* si $A = \emptyset$

ou

* si pour tout $x \in A$ il existe un intervalle OUVERT contenant x et contenu dans A :

$\forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad : \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$.

6 Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite FERMEE si son COMPLEMENTAIRE $\mathbb{R} \setminus A$ (aussi noté $\complement_{\mathbb{R}}^{A}$) est ouvert.

7 Remarque importante :

* Une partie de $\mathbb{R}$ peut très bien n'être ni ouverte, ni fermée.
* $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont les seules parties de $\mathbb{R}$ à la fois ouvertes et fermées.

8 PROPRIETES DES OUVERTS :

a) Toute réunion (finie ou non) d'ouverts est ouverte : $\forall i \in I \quad O_i$ ouvert $\Longrightarrow \left(\bigcup_{i\in I} O_i\right)$ ouvert

b) Toute intersection FINIE d'ouverts est ouverte : $O_1, O_2, \ldots, O_n$ ouverts $\Longrightarrow \left(\bigcap_{i=1}^{n} O_i\right)$ ouvert

9 PROPRIETES DES FERMES :

a) Toute intersection (finie ou non) de fermés est fermée : $\forall j \in J \quad F_j$ fermé $\Longrightarrow \left(\bigcap_{j\in J} F_j\right)$ fermé

b) Toute réunion FINIE de fermés est fermée : $F_1, F_2, \ldots, F_m$ fermés $\Longrightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{m} F_j\right)$ fermé.

10 ADHERENCE : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

a) L'ADHERENCE de A, notée $\bar{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A : c'est donc LE PLUS PETIT FERME contenant A.

b) $x \in \bar{A} \iff \forall \varepsilon > 0, \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$

$\iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A$ et $|x - a| < \varepsilon$

$\iff$ il existe une suite de points de A qui converge vers x.

11 INTERIEUR : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

a) L'INTERIEUR de A, noté $\mathring{A}$, est la réunion de tous les ouverts inclus dans A : c'est donc LE PLUS GRAND OUVERT contenu dans A.

b) $x \in \mathring{A} \iff \exists \varepsilon > 0 \ : \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$

12 FRONTIERE : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

a) La FRONTIERE de A, notée Fr(A), est l'ensemble des points x qui vérifient : pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient au moins un point de A et un point de $\complement A$.

b) $x \in Fr(A) \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A$ et $|x-a| < \varepsilon$ et $\exists b \notin A$ et $|x-b| < \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \complement A \neq \emptyset$

c) $Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$ (Fr(A) est donc FERME)

$Fr(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A}$

13 PROPRIETES : Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$.

a) $\mathring{A} \subset A \subset \bar{A}$.

b) $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\bar{A} \subset \bar{B}$

c) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ et $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

d) $\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$ et $\complement \bar{A} = \overset{\circ}{\complement A}$

e) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\left(A \cup B\right)^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

f) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$; $\left(A \cap B\right)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

g) Attention : $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$ mais $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \supset \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$

h) Attention : $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^{\circ} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathring{A}_i$ mais $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \subset \bigcap_{i\in I} \mathring{A}_i$

i) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$ et $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\circ} \supset \bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i$

j) $Fr(A) = Fr(\complement A)$

k) $\mathbb{R} = \mathring{A} \cup Fr(A) \cup \overset{\circ}{\complement A}$ ces 3 ensembles étant disjoints 2 à 2.

14 CARACTERISATION DES OUVERTS :

A ouvert $\iff \complement A$ fermé

$\iff \mathring{A} = A$

$\iff A \cap Fr(A) = \emptyset$

15 CARACTERISATION DES FERMES :

A fermé $\iff \complement A$ ouvert

$\iff \bar{A} = A$

$\iff$ pour toute suite de points de A qui converge, la limite est dans A.

$\iff Fr(A) \subset A$

16 BOLZANO-WEIERSTRASS : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

A fermé et borné $\iff$ Toute suite infinie de points de A contient une suite EXTRAITE qui CONVERGE vers un point de A

17 DENSITE : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que A est DENSE dans $\mathbb{R}$ si $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Exemples : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{D}$ (décimaux relatifs), $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$.

TOPOLOGIE DE R