SYSTEMES LINEAIRES (2)

2) on peut supposer, quitte à échanger 2 lignes que $a_{11} \neq 0$

3) on applique (6) : pour $i \geqslant 2$

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$$

on élimine ainsi x_1 sauf dans L_1

4) on recommence jusqu'à obtention d'un système <u>ECHELONNE</u> :

$$\left\{\begin{array}{lr}
d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots & + d_{1p}x_p = \delta_1 \\
\qquad d_{2,j_2}x_{j_2} + \cdots & + d_{2p}x_p = \delta_2 \\
\qquad\qquad d_{3,j_3}x_{j_3} + \cdots\cdots & + d_{3p}x_p = \delta_3 \\
\qquad\qquad\qquad \ddots \; d_{r,j_r}x_{j_r} + \cdots & + d_{rp}x_p = \delta_r \\
 & 0 = \delta_{r+1} \\
 & 0 = \delta_{r+2} \\
 & \vdots \\
 & 0 = \delta_n
\end{array}\right.$$

"Pivots", tous $\neq 0$

on a :

$$\boxed{r \leqslant n \text{ et } r \leqslant p}$$

α) Le nombre de pivots, qui est aussi le nbre de membres de gauche non nuls après échelonnage est le <u>RANG</u> de (S).

β) <u>Théorème du rang:</u> Le rang de (S), noté $rg(S)$, est indépendant de l'algorithme choisi pour échelonner. Tous les systèmes équivalents à (S) ont le $\overline{m}$ rang.

γ) Les inconnues $x_1, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ "en position pivot" sont appelées "inconnues principales"

δ) Les autres inconnues sont appelées "inconnues libres"

ε) On aura donc :

$$\left.\begin{array}{l}\text{nbre total}\\ \text{d'inconnues}\end{array}\right\} = \text{RANG} + \left\{\begin{array}{l}\text{nbre d'incon}\\ \text{nues libres}\end{array}\right.$$

5) <u>Fin de la résolution:</u>

α) si l'un des $\delta_{r+1}, \delta_{r+2}, \ldots, \delta_n$ n'est pas 0, (S) n'a pas de solutions

β) si $\delta_{r+1} = \delta_{r+2} = \cdots = \delta_n = 0$. Après suppression des $0=0$, 2 cas peuvent se produire :

* ou bien $r = p$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'inconnues libres, c'est-à-dire que le système échelonné est triangulaire, il y a alors une <u>UNIQUE</u> solution

* ou bien $r < p$, c'est-à-dire qu'il y a alors des inconnues libres, que l'on transpose à droite, pour obtenir un système triangulaire avec uniquement les inconnues principales, que l'on résoud. Il y a alors une <u>INFINITE</u> de solutions, une pour <u>CHAQUE CHOIX</u> d'inconnues libres

8 <u>SYSTEMES HOMOGENES</u>, suite :

a) <u>Rappel</u> : un système homogène a toujours au moins la solution nulle $(0, 0, \ldots, 0)$

b) Pour un système homogène, il n'y a donc que <u>2 cas possibles</u> :

1) ou bien le rang est égal au nombre d'inconnues et le système a une <u>unique solution qui est $(0,0,\ldots,0)$</u>

2) ou bien le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues et il y a, en plus de la solution nulle, <u>une infinité de solutions non nulles</u>

c) <u>Une conséquence très utile</u> :
Un système homogène qui a strictement plus d'inconnues que d'équations a une infinité de solutions non nulles

9 <u>SYSTEME DE CRAMER</u> :

a) Un système est dit "de Cramer" si, avec les notations précédentes,

$$\boxed{n = p = r}$$

b) Un système de Cramer a toujours une <u>UNIQUE</u> solution.

10 <u>CINQ REMARQUES UTILES</u> :

a) Si au cours de la résolution apparait soudain une ligne $0x_1 + \cdots + 0x_p = \beta$, avec justement $\beta \neq 0$, ce n'est pas nécessaire de continuer....

b) <u>Choix des pivots</u> : on a intérêt, pour éviter des complications calculatoires, à choisir des pivots simples. 1 ou −1 est souvent le meilleur choix. Si possible, il vaut mieux choisir des pivots indépendants d'éventuels paramètres, pour éviter d'alourdir la discussion de cas s'il y en a une.

c) <u>Pour éviter des dénominateurs</u>, on peut, comme c'est suggéré par (7) effectuer $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1$ au lieu de $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$

Dans les 2 cas, l'inconnue x_1 disparaitra.

d) Même si cela n'apparait pas explicitement ds l'exposé du pivot, rien n'interdit au cours de l'échelonnage d'introduire une opération "légitime" (5) pour utiliser par exemple une éventuelle symétrie du système ou une autre particularité.

e) <u>Une remarque vitale, mais méconnue</u>
Lorsqu'on résoud un système linéaire (S), il ne peut y avoir que <u>trois</u> conclusions possibles :

1) ou bien (S) n'a pas de solution ;
2) ou bien (S) a une unique solution ;
3) ou bien (S) a une infinité de solutions.