

SYSTEMES LINÉAIRES (2)

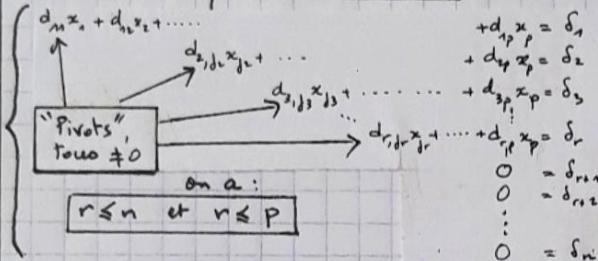
2) on peut supposer, quitte à échanger 2 lignes que $a_{11} \neq 0$

3) on applique ⑥: pour $i \geq 2$

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{11}}{a_{11}} L_1$$

on élimine ainsi x_{11} sauf dans L_1

4) on recommence jusqu'à obtention d'un système ÉCHELONNÉ:



a) le nombre de pivots, qui est aussi le nombre de membres de gauche non nuls après l'échelonnage est le RANG de (S).

b) Théorème du rang: le rang de (S), noté $rg(S)$, est indépendant de l'algorithme choisi pour échelonner. Tous les systèmes équivalents à (S) ont le m^e rang.

c) les inconnues $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1r}$ "en position pivot" sont appelées "inconnues principales"

d) les autres inconnues sont appelées "inconnues libres"

e) On aura donc :

$$\left. \begin{array}{l} \text{nbre total} \\ \text{d'inconnues} \end{array} \right\} = \text{RANG} + \left\{ \begin{array}{l} \text{nbre d'inconnues} \\ \text{libres} \end{array} \right\}$$

f) Fin de la résolution:

a) Si l'un des $\delta_{1+r1}, \delta_{1+r2}, \dots, \delta_n$ n'est pas 0, (S) n'a pas de solutions

b) Si $\delta_{1+r1} = \delta_{1+r2} = \dots = \delta_n = 0$. Après suppression des 0=0, 2 cas peuvent se produire :

* ou bien $r = p$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'inconnues libres, c'est-à-dire que le système échelonné est triangulaire, il y a alors une UNIQUE solution

* ou bien $r < p$, c'est-à-dire qu'il y a alors des inconnues libres, que l'on transpose à droite, pour obtenir un système triangulaire avec uniquement les inconnues principales, que l'on résoud.

Il y a alors une INFINIE de solutions, une pour CHAQUE choix d'inconnues libres

8) SYSTEMES HOMOGENES, suite:

a) Rappel: un système homogène a toujours au moins la solution nulle $(0, 0, \dots, 0)$

b) Pour un système homogène, il n'y a donc que 2 cas possibles:

1) ou bien le rang est égal au nombre d'inconnues et le système a une unique solution qui est $(0, 0, \dots, 0)$

2) ou bien le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues et il y a, en plus de la solution nulle, une infinité de solutions non nulles

c) Une conséquence très utile.

Un système homogène qui a strictement plus d'inconnues que d'équations a une infinité de solutions non nulles

9) SYSTEME DE CRAMER:

a) Un système est dit de Cramer "si", avec les notations précédentes,

$$n = p = r$$

b) Un système de Cramer a toujours une UNIQUE solution.

10) CINQ REMARQUES UTILES:

a) Si au cours de la résolution apparaît soudain une ligne $0x_1 + \dots + 0x_p = \beta$, avec justement $\beta \neq 0$, ce n'est pas nécessaire de continuer....

b) choix des pivots: on a intérêt, pour éviter des complications calculatoires, à choisir des pivots simples. 1 ou -1 est souvent le meilleur choix. Si possible, il vaut mieux choisir des pivots indépendants d'éventuels paramètres, pour éviter d'alourdir la discussion de cas où il y en a une.

c) Pour éviter des dénominateurs, on peut, comme c'est suggéré par ⑦ effectuer $L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{1n}L_n$ au lieu de $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{1n}}{a_{11}}L_n$

Dans les 2 cas, l'inconnue x_{11} disparaîtra.

d) Même si cela n'apparaît pas explicitement de l'emploi du pivot, rien n'interdit au cours de l'échelonnage d'introduire une opération "légitime" ⑤ pour utiliser par exemple une éventuelle symétrie du système ou une autre particularité.

e) Une remarque vitale, mais mal connue lorsqu'on résout un système linéaire (S), il ne peut y avoir que trois conclusions possibles:

- ou bien (S) n'a pas de solution;
- ou bien (S) a une unique solution;
- ou bien (S) a une infinité de solutions.