SYSTEMES LINEAIRES (1)

1

a) On appelle équation linéaire à p inconnues toute équation de la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = \beta \qquad (1)$$

- $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est le p-uplet des inconnues.
- $a_1, a_2, \dots, a_p, \beta$ sont des coefficients numériques réels.

b) Un p-uplet $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ de réels est solution de (1) si et seulement si l'égalité $a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_pc_p = \beta$ est vérifiée.

c) L'équation $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p = \beta$

- n'a pas de solution si $\beta \neq 0$
- a tout p-uplet $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ comme solution si $\beta = 0$

2

a) On appelle SYSTEME DE n EQUATIONS A p INCONNUES la juxtaposition de n équations linéaires à p inconnues

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est le p-uplet des inconnues
- pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, a_{ij} et b_i sont des coefficients numériques réels.
- La i-ème équation $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p = b_i$ est notée L_i et appelée i^e ligne de (S)

b) Un p-uplet $(c_1, c_2, \dots, c_p)$ est solution de (S) si et seulement si il est solution de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les lignes

c) Résoudre le système consiste à trouver l'ensemble de $\boxed{\text{TOUTES}}$ les solutions du système

d) Un système n'ayant aucune solution est parfois dit "impossible"

e) Un système ayant une infinité de solutions est parfois dit "indéterminé"

3 SYSTEMES EQUIVALENTS

a) Deux systèmes sont dits $\boxed{\text{EQUIVALENTS}}$ s'ils ont le $\boxed{\text{MÊME}}$ ensemble de solutions : $(S) \Leftrightarrow (S')$ ou $(S) \sim (S')$

b) Le principe de la méthode qui est exposé plus loin est de résoudre un système en le transformant en systèmes équivalents de plus en plus simples.

4 SYSTEMES HOMOGENES

a) On appelle système $\boxed{\text{HOMOGENE}}$ un système dont tous les membres de droite sont NULS. Avec les notations de $\boxed{2}$ a), cela signifie : $b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b_n = 0$

b) Une remarque importante :
Un système homogène admet toujours la solution NULLE $(0, 0, \dots, 0)$

5 OPERATIONS ELEMENTAIRES :

a) On appelle OPERATION ELEMENTAIRE sur les lignes d'un système toute opération de l'un des 3 types suivants :

① pour $i \neq j$ $\quad L_i \longleftrightarrow L_j$ Echange des lignes L_i et L_j
② pour $\alpha \neq 0$ $\quad L_i \longleftarrow \alpha L_i$ Multiplication de L_i par α
③ pour $i \neq j$ $\quad L_i \longleftarrow L_i + \beta L_j$ Ajout à L_i de L_j multipliée par β

b) On appellera "opération légitime" les 2 opérations suivantes

④ si $\alpha \neq 0$ et $i \neq j$ $L_i \longleftarrow \alpha L_i + \beta L_j$
⑤ $L_i \longleftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \beta_j L_j$

c) Le résultat essentiel est le suivant :

> quand on applique à un système (S) l'une des opérations ①, ②, ③, ④ ou ⑤, on obtient un système EQUIVALENT à (S)

6 FONDEMENT DU PIVOT DE GAUSS

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{cases} \overset{⑥}{\sim} \begin{cases} L_1 \\ L_2 + \beta_2 L_1 \\ \vdots \\ L_n + \beta_n L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ \vdots \\ L_n \end{cases} \overset{⑦}{\sim} \begin{cases} L_1 \\ \alpha_2 L_2 + \beta_2 L_1 \\ \vdots \\ \alpha_n L_n + \beta_n L_1 \end{cases}$$

si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont tous $\neq 0$

7 METHODE DU PIVOT DE GAUSS

a) Principe : Il s'agit d'utiliser les opérations vues en ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦ pour transformer le système que l'on cherche à résoudre en un système EQUIVALENT ECHELONNE.

b) Exposé de la méthode :
Considérons le système (S) de $\boxed{2}$

1) si l'on a $a_{11} = a_{21} = \dots = a_{n1} = 0$, il est clair que dans (S), on peut remplacer x_1 par tout réel et résoudre un système en $(x_2, \dots, x_p)$