Equations linéaires - Systèmes et matrices

Version système

Problème : On cherche $x_1, \ldots, x_p$ réels tels que

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Idée : On applique des *opérations élémentaires* sur les lignes $L_1, \ldots, L_n$ su système (S) pour se ramener à un système plus simple (SE). Plus précisément, les opérations élémentaires sont

- l'échange de deux lignes : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* α : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

Via la méthode du pivot de Gauss, on utilise ces opérations pour se ramener à un *système échelonné* (SE) équivalent à (S), c'est-à-dire un système dont le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne est strictement croissant :

$$(SE) \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + \quad + a'_{1p}x_p & = b'_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + \quad + a'_{2p}x_p & = b'_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad a'_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a'_{rp}x_p & = b'_r \\ 0 & = b'_{r+1} \\ & \vdots \\ 0 & = b'_n \end{cases}$$

où on a $1 < j_2 < \cdots < j_r \leq p$, et où les "pivots" $a'_{11}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{rj_r}$ sont non nuls. Le nombre d'équations dont le membre de gauche est non nul, r, est le *rang* du système : il donne le nombre d'inconnues *principales* (les autres, s'il en reste, sont les inconnues *libres*.) On a $\boxed{r \leq p,\ r \leq n}$ et $\boxed{p = r + \text{ nb d'inconnues libres}}$.

Résolution : On a alors différents cas :

- Si l'un des $b'_{r+1}, \ldots, b'_n$ est non nul, le système n'a pas de solution ;
- Sinon, on se ramène au système équivalent

$$(SE') \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + \quad + a'_{1p}x_p & = b'_1 \\ \qquad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + \quad + a'_{2p}x_p & = b'_2 \\ & \vdots \\ \qquad\qquad a'_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a'_{rp}x_p & = b'_r \end{cases}$$

Alors,

- si $r = p$, le système est triangulaire et admet une unique solution ;
- si $r < p$, chaque choix pour les inconnues libres $(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_p)$ donne une solution. Il y a donc une infinité de solutions.

Version matrice

Problème : Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{R}^n$. On cherche $X \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$(S)\ AX = B$$

Idée : Si $E \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est une matrice inversible, le problème est équivalent à $EAX = EB$. On se ramène à une matrice plus simple en multipliant A par des *matrices élémentaires* :

- $E_{i\leftarrow j}$ obtenue en échangeant la i-ème et la j-ème ligne de I_n : alors $E_{i\leftarrow j}A$ est la matrice obtenue en échangeant les lignes i et j de A ;
- $E_{i\leftarrow \alpha i}$ obtenue en multipliant la i-ème de I_n par $\alpha \neq 0$: alors $E_{i\leftarrow \alpha i}A$ est la matrice obtenue en multipliant par α la i-ème ligne de A ;
- $E_{i\leftarrow i+\lambda j}$ obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de I_n à la i-ème. Alors $E_{i\leftarrow i+\lambda j}A$ est la matrice obtenue en ajoutant λ fois la j-ème ligne de A à la i-ème.

Multiplier successivement A par ces matrices revient donc à appliquer les opérations élémentaires aux lignes de A. Via le pivot de Gauss, on trouve ainsi P obtenue par produits successifs des matrices élémentaires, telle que $A' = PA$ est *échelonnée*, c'est-à-dire de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} + & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & + & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & + & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où les $+$ représentent des coefficients strictement positifs. On a les résultats suivants :

- pour toute matrice élémentaire E, A est de rang r si, et seulement si, EA est de rang r.
- Pour toute matrice A il existe une matrice échelonnée A' telle que $A' = PA$, où P est un produit de matrices élémentaires ;
- le nombre de lignes non nulles de A' est le *rang* de la matrice A. Il est égal à la dimension de $\mathrm{Im}(A)$.
- Théorème du rang : $\boxed{rg(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = p}$. On en déduit que le nombre d'inconnues libres est donné par la dimension du noyau de A.

Revenons à l'équation initiale $AX = B$: on utilise l'interprétation de A comme application linéaire $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ pour obtenir des informations sur l'existence et l'unicité des solutions. Ainsi :

1. Il existe (au moins) une solution si $B \in \mathrm{Im}(A)$. Si $\mathrm{rg}(A) = p$, il existe une solution pour tout $B \in \mathbb{R}^p$.
2. Si $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$, la solution, si elle existe, est unique.
3. Plus généralement, si X est une solution, alors l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{X + Z,\ Z \in \mathrm{Ker}(A)\}}$$

Systèmes carrés : Dans le cas où $p = n$, le système admet une unique solution $X = A^{-1}B$ si, et seulement si, A est inversible, autrement dit si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas contraire, il y a soit aucune solution, soit une infinité de solution, selon si $B \in \mathrm{Im}(A)$.