Suites et séries de fonctions - Méthodes

Convergence simple : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que (f_n) *converge simplement* vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I si, pour tout $x_0 \in I$, la suite réelle $(f_n(x_0))_n$ converge vers $f(x_0)$. En quantificateurs :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

Pour montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I, on prend donc un élément quelconque $x \in I$ et on montre que $f_n(x) \to f(x)$, tout simplement.

Convergence uniforme : On dit que (f_n) *converge uniformément* vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I si $s_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. Autrement dit, sur I tout entier, f_n reste à une distance inférieure à s_n de f, et s_n devient de plus en plus petit. En quantificateurs :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x_0 \in I, |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

Propriétés : Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors :

- (f_n) converge simplement vers f : $\boxed{cvu \Rightarrow cvs}$.

  ⚠ : La réciproque est fausse !
- Si, pour tout n, f_n est continue sur I, alors f est continue sur I.
- ⚠ : ça ne marche pas avec la dérivabilité ! Ainsi, sur $\mathbb{R}$, la suite $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ converge uniformément vers $f(x) = |x|$; mais f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors que f ne l'est pas en 0.
- Si $x_n \to x$ dans I, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.
- Si $I = [a, b]$ est fermé borné et f_n est intégrable sur I pour tout n, alors f est intégrable et $\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$

  ⚠ Ce n'est vrai que sur un intervalle borné. Ainsi, sur $\mathbb{R}^+$, $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ converge uniformément vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}^+} f_n(t)dt = 1 \nrightarrow 0 = \int 0dt$.

Méthode : Pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$, on procède comme suit :

1. On trouve la limite simple de (f_n), en cherchant pour chaque x la limite $f(x)$ de $(f_n(x))_n$. Ceci définit une fonction f sur I.
2. Pour montrer que (f_n) converge uniformément vers f, on doit montrer que $s_n = \sup_I |f_n - f| \to 0$,
   - soit majorant $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite u_n qui tend vers 0 et *ne dépend pas de x*.
   - soit en dressant le tableau de variations de $f_n - f$ pour calculer explicitement s_n.

Méthode : Supposons que (f_n) converge *simplement* vers f. Pour montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I, on peut

- Calculer $s_n = \sup_I |f_n - f|$ et montrer que $s_n \nrightarrow 0$;
- Montrer que pour tout n, f_n est continue, mais que f n'est pas continue sur I ;
- Exhiber une suite convergente $x_n \to x$ de I telle que $f_n(x_n) \nrightarrow f(x)$.

  Exemple : Sur $I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Dérivabilité : On a quand même les résultats suivants liant convergence uniforme et dérivation :

1. Si (f_n) est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $f_n(a) \to b$ pour un point $a \in I$ et telle que (f_n') converge uniformément vers une fonction g, alors f_n converge *simplement* vers f définie sur I par
$$f(x) = b + \int_a^x g(t)dt$$
2. Si (f_n) est une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur I qui converge uniformément vers f, et si la suite de fonction f_n' converge uniformément vers une fonction g, alors f est dérivable et $f' = g$.

Séries de fonctions : Pour une suite de fonctions $(f_n)_n$, on appelle *série de terme général* f_n la suite de fonctions $(S_n)_n$ définie sur I par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_n(x)$.

- On dit que la série de t.g. $(f_n)_n$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonctions (S_n) converge simplement/uniformément. Par exemple, la série de terme général $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1, 1[$ vers $S(x) = \frac{1}{1-x}$.
- *Convergence normale :* Si, pour tout $x \in I$, $|f_n(x)| \leq u_n$, où u_n *ne dépend pas de x*, et si la série (réelle) de terme général u_n converge, alors on dit que la série (de fonctions) de terme général f_n converge *normalement.*

  Remarque : cela revient à dire que la série de terme général $s_n = \sup_I |f_n(x)|$ converge.

Théorème : Si la série de terme général f_n converge normalement, alors elle converge uniformément. AUtrement dit, pour les séries,

$$\boxed{cvn \Rightarrow cvu \Rightarrow cvs}$$

⚠ La réciproque est fausse :

- La série de terme général $f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement vers $S(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais ne converge pas uniformément.
- La série de terme général $g_n(x) = \frac{1}{n}(-1)^{n+1}x^n$ converge uniformément, mais pas normalement, sur $[0, 1]$.