

11) Dans ce qui suit, Δ est une partie de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , $(u_n(x))_{n \geq 0}$ est une suite d'applications de Δ dans \mathbb{C} ; on pose $\forall x \in \Delta \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x)$

12) on dira que la SERIE d'applications $\sum u_n(x)$ converge SIMPLEMENT si la suite $s_n(x)$ converge simplement.

on dira que la SERIE d'applications $\sum u_n(x)$ converge UNIFORMEMENT si la suite $s_n(x)$ converge uniformément.

13) C.N.S. DE CONVERGENCE UNIFORME:

La série $\sum u_n(x)$ converge unif. vers $s(x)$ sur Δ



$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \sup_{x \in \Delta} |s(x) - s_n(x)| \leq \epsilon$$

La série $\sum u_n(x)$ converge uniform. sur Δ



$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \geq 1 \forall x \in \Delta |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq \epsilon$$

14) CONVERGENCE NORMALE:

La série $\sum u_n(x)$ converge NORMALEMENT sur Δ

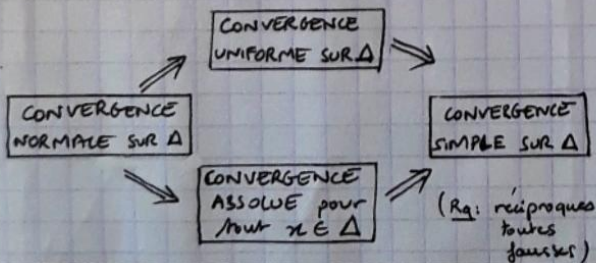


La série à termes positifs $\sum M_n$ (où $M_n = \sup_{x \in \Delta} |u_n(x)|$) est CONVERGENTE



Il existe une STP $\sum v_n$ numérique (donc indépend. de x) CONVERGENTE, telle que $\forall x \in \Delta \quad |u_n(x)| \leq v_n$

15)



16) CONTINUITÉ

Si la série $\sum u_n(x)$ est uniformément convergente sur Δ , et si chacune des applications $u_n(x)$ est continue sur Δ , la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est aussi continue sur Δ .

17) INTEGRATION

Soit $\sum u_n$ une série d'applications réelles continues sur le segment $[a, b]$; supposons que la série $\sum u_n$ soit uniformément convergente sur $[a, b]$ et soit s sa somme.

Posons, pour $x \in [a, b]$

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(x) = \int_a^x s(t) dt.$$

la série $\sum U_n$ converge alors uniformément sur $[a, b]$ et a pour somme \mathcal{F} .

on peut donc écrire, pour $x \in [a, b]$:

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^x u_n(t) dt \right)$$

18) DERIVATION

Soit $\sum u_n$ une série d'applications de classe \mathcal{C}^1 , de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On suppose

a) qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que la série NUMÉRIQUE $\sum u_n(t_0)$ converge;

b) que la série d'applications $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $\sigma(x)$

Alors

* la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

* la somme $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et on a $s'(x) = \sigma(x)$

on peut donc écrire:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} u_n(x) \right)$$

19) REGLE D'ABEL "UNIFORME":

Soit $u_n(x)$ une suite d'applications de Δ dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} de la forme

$$u_n(x) = E_n(x) v_n(x), \quad \text{avec } E_n(x) > 0$$

Pour que la série $\sum u_n(x)$ soit UNIFORMEMENT CONVERGENTE sur Δ , il SUFFIT que les 3 conditions suivantes soient vérifiées:

a) $\forall x \in \Delta$, la suite $E_n(x)$ est DECROISSANTE

b) la SUITE $E_n(x)$ tend UNIFORMEMENT vers ZERO quand n tend vers $+\infty$

c) $\exists A > 0$:

$$\forall x \in \Delta \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_0(x) + v_1(x) + \dots + v_n(x)| \leq A$$

20) APPLICATION:

Soit E_n une suite de réels > 0 , décroissante et tendant vers 0.

Alors pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ la série $\sum E_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.