[11] Dans ce qui suit, Δ est une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(u_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite d'applications de Δ dans $\mathbb{C}$; on pose $\forall x \in \Delta \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$

[12] On dira que la <u>SERIE</u> d'applications $\sum u_n(x)$ converge <u>SIMPLEMENT</u> si la suite $s_n(x)$ converge simplement.
On dira que la <u>SERIE</u> d'applications $\sum u_n(x)$ converge <u>UNIFORMEMENT</u> si la suite $s_n(x)$ converge uniformément.

[13] <u>C.N.S. DE CONVERGENCE UNIFORME</u> :

La série $\sum u_n(x)$ converge unif. vers $s(x)$ sur Δ

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \quad \sup_{x \in \Delta} |s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$$

La série $\sum u_n(x)$ converge uniform. sur Δ

$$\Updownarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ \forall p \geq 1 \ \forall x \in \Delta \quad |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| \leq \varepsilon$$

[14] <u>CONVERGENCE NORMALE</u> :

La série $\sum u_n(x)$ converge <u>NORMALEMENT</u> sur Δ

$$\Updownarrow$$

La série à termes positifs $\sum M_n$ (où $M_n = \sup_{x \in \Delta} |u_n(x)|$) est <u>CONVERGENTE</u>

$$\Updownarrow$$

Il existe une STP $\sum v_n$ numérique (donc indépend. de x) <u>CONVERGENTE</u>, telle que $\forall x \in \Delta \quad |u_n(x)| \leq v_n$

[15]

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\text{CONVERGENCE UNIFORME SUR } \Delta} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\boxed{\text{CONVERGENCE NORMALE SUR } \Delta} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \boxed{\text{CONVERGENCE SIMPLE SUR } \Delta} \\
 & \boxed{\text{CONVERGENCE ABSOLUE pour tout } x \in \Delta} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

(Rq : réciproques toutes fausses)

[16] <u>CONTINUITE</u>

Si la série $\sum u_n(x)$ est <u>uniformément</u> convergente sur Δ, et si chacune des applications $u_n(x)$ est <u>continue</u> sur Δ, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est aussi continue sur Δ.

<u>SUITES ET SERIES DE FONCTIONS</u>

(Suite...)

[17] <u>INTEGRATION</u>

Soit $\sum u_n$ une série d'applications réelles continues sur le segment $[a,b]$; supposons que la série $\sum u_n$ soit uniformément convergente sur $[a,b]$ et soit s sa somme.

Posons, pour $x \in [a,b]$

$$U_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,dt \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(x) = \int_a^x s(t)\,dt.$$

La série $\sum U_n$ <u>converge alors uniformément</u> sur $[a,b]$ et a <u>pour somme</u> $\mathcal{S}$.

On peut donc écrire, pour $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x \left(\sum_0^{\infty} u_n(t) \right) dt = \sum_0^{\infty} \left(\int_a^x u_n(t)\,dt \right)$$

[18] <u>DERIVATION</u>

Soit $\sum u_n$ une série d'applications de classe $\mathcal{C}^1$, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose

a) qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que la série NUMERIQUE $\sum u_n(t_0)$ converge ;

b) que la série d'applications $\sum u'_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $\sigma(x)$

Alors

* la série $\sum u_n$ <u>converge uniformément</u> sur $[a,b]$
* la somme $s(x) = \sum_0^{\infty} u_n(x)$ est <u>de classe $\mathcal{C}^1$</u> sur $[a,b]$ et on a $s'(x) = \sigma(x)$

On peut donc écrire :

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_0^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{d}{dx} u_n(x) \right)$$

[19] <u>REGLE D'ABEL "UNIFORME"</u>.

Soit $u_n(x)$ une suite d'applications de Δ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de la forme

$$u_n(x) = \varepsilon_n(x)\, v_n(x), \quad \text{avec } \varepsilon_n(x) > 0$$

Pour que la série $\sum u_n(x)$ soit <u>UNIFORMEMENT CONVERGENTE</u> sur Δ, il <u>SUFFIT</u> que les 3 conditions suivantes soient vérifiées :

a) $\forall x \in \Delta$, la suite $\varepsilon_n(x)$ est <u>DECROISSANTE</u>

b) la <u>SUITE</u> $\varepsilon_n(x)$ tend <u>UNIFORMEMENT</u> vers <u>ZERO</u> quand n tend vers $+\infty$

c) $\exists A \geq 0$: $\forall x \in \Delta \ \forall n \in \mathbb{N} \quad |v_0(x) + v_1(x) + \cdots + v_n(x)| \leq A$

[20] <u>APPLICATION</u> :

Soit ε_n une suite de réels > 0, décroissante et tendant vers 0.
Alors pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ la série $\sum \varepsilon_n e^{inx}$ est uniformément convergente sur $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.