# SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

**0** Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\Delta$ est un ensemble non vide, $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite d'applications de $\Delta$ dans $\mathbb{K}$ : $\forall n \geq 0 \quad f_n \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{K})$

**1** CONVERGENCE SIMPLE : La suite $(f_n)$ converge SIMPLEMENT sur $\Delta$ s'il existe $f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{K})$ telle que $\forall x \in \Delta \quad \lim_{n\,\infty} f_n(x) = f(x)$, c.à.d

$\boxed{\forall x \in \Delta} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

La fonction $f$ est appelée : "limite simple de la suite $f_n$"

**2** CONVERGENCE UNIFORME : La suite $(f_n)$ converge UNIFORMEMENT sur $\Delta$ s'il existe $f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{K})$ telle que :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \boxed{\forall x \in \Delta} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

La fonction $f$ est appelée ici : " limite uniforme des $f_n$"

**3** ATTENTION à la place de $\boxed{\forall x \in \Delta}$ dans $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ : dans $\boxed{1}$ $n_0$ dépend de $x$, dans $\boxed{2}$ $n_0$ ne dépend pas de $x$.

LA CONVERGENCE UNIFORME ENTRAINE DONC LA CONVERGENCE SIMPLE. LA RECIPROQUE EST FAUSSE

**4** CRITERES DE CONVERGENCE UNIFORME :

Les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

a) La suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\Delta$

b) $\exists f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{K})$ :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Delta \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

c) $\exists f \in \mathcal{F}(\Delta, \mathbb{K})$ : $\lim m_n = 0$

avec $m_n = \sup_{x \in \Delta} |f_n(x) - f(x)|$

d) (critère de Cauchy "uniforme")

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Delta \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall p \geq 0$

$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

**5** TRADUCTION EN TERMES DE NORME :

Si l'on se place dans l'evn $(\mathcal{B}(\Delta, \mathbb{K}), \| \ \|_\infty)$ des applications BORNEES de $\Delta$ dans $\mathbb{K}$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Delta} |f(x)|$, c'est-à-dire si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions bornées sur $\Delta$, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) $(f_n)$ converge uniformément sur $\Delta$ vers $f$

b) $f_n$ converge vers $f$ dans l'evn $(\mathcal{B}, \| \ \|_\infty)$

Rq : La limite uniforme de toute suite de fonctions bornées est bornée.

**6** CRITERE DE NON. CONVERGENCE UNIFORME :

a) Pour que la suite $(f_n)$ NE CONVERGE PAS UNIFORMEMENT sur $\Delta$ vers $f$, IL SUFFIT qu'il existe une suite $(x_n)$ de points de $\Delta$ telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

b) En particulier, pour que la suite $(f_n)$ NE CONVERGE PAS UNIFORMEMENT VERS ZERO sur $\Delta$, IL SUFFIT qu'il existe une suite $(x_n)$ de points de $\Delta$ telle que $(f_n(x_n))$ ne tende pas vers 0.

**7** THEOREME FONDAMENTAL : CONTINUITE

Soit $\Delta$ une PARTIE de $\mathbb{K}$, et $f_n$ une suite d'applications CONTINUES de $\Delta$ dans $\mathbb{K}$

a) Si $(f_n)$ converge UNIFORMEMENT sur $\Delta$, alors la limite $f$ est CONTINUE sur $\Delta$.

b) Si $\Delta$ est un INTERVALLE de $\mathbb{R}$, et si $(f_n)$ converge uniformément sur tout segment $[a,b]$ $(a<b)$ contenu dans $\Delta$, alors la limite $f$ est continue sur $\Delta$.

**8** ATTENTION : La limite peut-être continue sans que la convergence soit uniforme

Ex : $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ : $\forall n \geq 0$ $f_n$ continue, et $f_n$ converge non uniformément vers 0 sur tout $\mathbb{R}$.

**9** INTEGRATION SUR UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$ :

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications CONTINUES de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), qui converge UNIFORMEMENT vers $f$

Alors :

a) la suite $F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,dt$ converge uniformément vers $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ sur $[a,b]$

b) $\lim_{n\,\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$

Remarque : on note souvent le b) ainsi :

$$\lim_{n\,\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b \left(\lim_{n\,\infty} f_n(t)\right) dt$$

(" Echange ou interversion intégration et pass. à la lim.")

**10** DERIVATION SUR UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$ :

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'applications DE CLASSE $C^1$ de $[a,b]$ $(a<b)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On suppose

* qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ t.q. la suite $f_n(t_0)$ converge ;
* que la suite $(f'_n)_{n\geq 0}$ converge UNIFORMEMENT sur $[a,b]$ vers $g$.

Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f$ de classe $C^1$ telle que $f' = g$.

Remarque 1 : ce résultat s'écrit aussi

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

(" Echange dérivation - passage à la limite ")

Remarque 2 : ce résultat demeure vrai si $\Delta$ est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, et si l'on remplace dans les hypothèses et la conclusion "convergeant uniformément sur $[a,b]$" par "convergeant uniformément sur tout segment contenu dans $\Delta$".