La notation $\sum$

Notation : Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres (réels ou complexes), et $p \leq q$ deux entiers. On note

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q.$$

Avantages :

- Plus compact
- Evite les ambiguïtés liées aux "..." : par exemple, est-ce que $1 + 2 + ... + 16$ dénote $\sum_{k=0}^{16} k$ ou $\sum_{k=0}^{4} 2^k$?

Dans la notation $S = \sum\limits_{k=p}^{q} u_k$, l'indice k est muet :

$$\sum_{k=p}^{q} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_q = \sum_{l=p}^{q} u_k$$

D'ailleurs, ni k ni l n'apparaissent dans la somme $u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q$ qu'on essaie de "compacter".

Nombre de termes : La somme $S = \sum_{k=p}^{q} u_k$ comporte $q-p+1$ termes. Une façon de s'en rappeler est de remarquer :

$$\overbrace{\underbrace{u_1 + ... + u_{p-1}}_{p-1 \text{ termes}} + \underbrace{u_p + ... + u_q}_{S:\ q-(p-1) \text{ termes}}}^{q \text{ termes}}$$

Exemple : $\sum\limits_{k=23}^{42} 1 = \underbrace{1 + ... + 1}_{42-23+1 \text{ fois}} = 20.$

Attention : $S = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ a donc $n+1$ termes.

Règles de calcul : Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites de nombres, et λ un nombre (complexe ou réel). Alors :

$$\sum_{k=p}^{q} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=p}^{q} b_k,$$

$$\sum_{k=p}^{q} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{q} a_k$$

Par contre, en général,

$$\sum_{k=p}^{q} (a_k \cdot b_k) \neq \left(\sum_{k=p}^{q} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=p}^{q} b_k\right)$$

Par exemple

$$\sum_{k=0}^{1} a_k b_k = a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = \sum_{k=0}^{1} a_k \sum_{k=0}^{1} b_k$$

Changement d'indices : Remarquons que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = u_1 + u_2 + ... + u_{n+1} = \sum_{l=1}^{n+1} u_l.$$

Plus généralement, pour p, q, a entiers,

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k+a} = u_a + u_{a+1} + ... + u_{a+n} = \sum_{l=a}^{a+n} u_l.$$

On peut écrire directement le changement d'indice dans le cas d'un *décalage* : pour calculer $\sum_{k=p}^{q} u_{k+a}$, on pose $l = k + a$ et on observe que, lorsque k parcourt les entiers de p à q, l parcourt les entiers de $p + a$ à $q + a$, donc $\sum_{k=p}^{q} u_{k+a} = \sum_{l=p+a}^{q+a} u_l$.

Un autre changement d'indice usuel est la *symétrie* :

$$\sum_{k=0}^{n} u_{n-k} = u_n + u_{n-1} + ... + u_0 = \sum_{l=0}^{n} u_l.$$

On peut poser directement $l = n - k$; quand k parcourt $\{0, ..., n\}$, l aussi parcourt $\{0, ..., n\}$.

Sommes téléscopiques : On peut réaliser la simplification "par télescopage"

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= u_{n+1} - u_n + u_n - u_{n-1} + ... + u_1 - u_0 \\ &= u_{n+1} - u_0\end{aligned}$$

Exemple : $\sum_{k=1}^{38} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{38} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{39}$

Formules usuelles :

- Somme d'une suite arithmétique $u_n = u_0 + nr$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

- Somme d'une suite géométrique $u_n = u_0 r^n,\ r \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$$

- Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$$

- Factorisation de $a^n - b^n$:

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$