18, SUITE (CAUCHY, PARSEVAL)

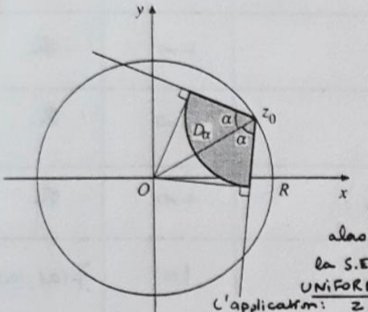
b) (Egalité de Parseval) $\forall r \in]0, R[$ $\sum_0^{\infty}{}' |a_n|^2 r^{2n}$ converge et on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}{}' |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

19 CONVERGENCE RADIALE :

a) Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ une S.E de RCV égal à 1. Si la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n$ converge, alors la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ converge UNIFORMEMENT sur $[0, 1]$, ce qui entraine :
$$\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n\right) = \sum_0^{\infty}{}' a_n.$$

b) Plus généralement, soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. de RCV égal à 1. Si la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n e^{in\alpha}$ converge, alors la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ converge UNIFORMEMENT sur le rayon $[0, e^{i\alpha}]$, ce qui entraine : $\lim_{r \to 1^-} \left(\sum_0^{\infty}{}' a_n (re^{i\alpha})^n\right) = \sum_0^{\infty}{}' a_n e^{in\alpha}$

c) Plus généralement encore : Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. de RCV égal à $R \in]0; +\infty[$, de somme notée S, et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| = R$.



On note, pour $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}[$, D_α l'ensemble des z de $\mathbb{C}$ tels qu'il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tel que : $\begin{cases} z_0 - z = \rho z_0 e^{i\theta} \\ \rho \leqslant \cos\alpha \\ |\theta| \leqslant \alpha \end{cases}$

Si $\sum_0^{\infty}{}' a_n z_0^n$ converge, alors, pour tout $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, la S.E. $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ converge UNIFORMEMENT sur D_α et l'application : $z \longmapsto S(z) = \sum' a_n z^n$ est continue sur D_α.

d) Réciproque partielle, due à Tauber : soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ une S.E. de RCV égal à 1, de somme $S(x)$. On suppose :

α) $\lim_{\infty}(n a_n) = 0$
β) $\lim_{x \to 1^-} S(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. ‖ Alors : $\sum_0^{\infty}{}' a_n = \lambda$

e) Attention cependant : Réciproque "complète" du a) fausse : $\lim_{x \to 1^-} \left(\sum_0^{\infty}{}' (-1)^n x^n\right) = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}$, mais $\sum_0^{\infty}{}' (-1)^n$ diverge

f) Remarque : a) immédiat si $\forall n \geqslant 0$ $a_n \geqslant 0$, ou bien si $\forall n \geqslant 0$ $a_n = (-1)^n \alpha_n$ avec $\alpha_n > 0$ et $\alpha_n \searrow 0$.

20 DEVELOPPEMENT EN SERIE ENTIERE :

a) Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ (Ensemble des voisinages (réels) de 0) et $f \in \mathbb{C}^V$ (ensemble des applications de V dans $\mathbb{C}$). On dira que f est DEVELOPPABLE EN SERIE ENTIERE EN 0 (abrégé en D.S.E.(0)) ssi il existe une S.E. $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ de rayon noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tels que :
* $R > 0$
* $\forall x \in U \cap V \cap]-R; R[$ $\quad f(x) = \sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$

b) Plus généralement : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$. On dira que que f est DEVELOPPABLE EN SERIE ENTIERE EN x_0 (abrégé en DS.E.(x_0)) ssi il existe une S.E. $\sum_0^{\infty}{}' a_n u^n$ de rayon noté R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tels que :
* $R > 0$
* $\forall x \in U \cap V \cap]-R, R[$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n (x - x_0)^n$

Remarque : f D.S.E.(x_0) $\Leftrightarrow$ $g(u) = f(x_0 + u)$ D.S.E.(0)

21 UNICITE DU DEVELOPPEMENT EN S.E. :

Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$, f D.S.E.(0) et $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ une S.E. de RCV égal à $R > 0$. Soit $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tel que :
$\forall x \in U \cap V \cap]-R; R[$ $\quad f(x) = \sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $U \cap V \cap]-R; R[$ et
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

22 FORMULE DE MAC-LAURIN :

a) Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$, f D.S.E.(0). La relation :
$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}{}' \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, valable sur un intervalle $]-\alpha; \alpha[$ pour un $\alpha > 0$

22, SUITE (MAC. LAURIN)

... est appelée DEVELOPPEMENT EN S.E. de f en 0, ou encore DEVELOPPEMENT DE MAC-LAURIN de f.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$, $f \in \mathbb{C}^V$, f D.S.E(x_0). La relation $f(x) = \sum_0^{\infty}{}' \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, valable sur un intervalle $]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$ (pour un $\alpha > 0$) est appelée DEVELOPPEMENT EN S.E. de f en x_0 ou encore DEVELOPPEMENT DE TAYLOR de f en x_0

23 PARITE, IMPARITE :

Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$, f D.S.E(0) et soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ le devel. en S.E. de f en 0.

a) Si f est PAIRE, alors $\forall p \in \mathbb{N}$ $\quad a_{2p+1} = 0$

b) Si f est IMPAIRE, alors $\forall p \in \mathbb{N}$ $\quad a_{2p} = 0$

24 RESTE DE TAYLOR : Soit $\alpha > 0$, $f :]-\alpha; \alpha[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^{∞}.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-\alpha; \alpha[$ on considère le RESTE $(R_n(f))(x)$ ds la formule avec RESTE INTEGRAL appliquée à f entre 0 et x à l'ordre n, c'est-à-dire :
$$(R_n(f))(x) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n}{}' \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k\right) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$
Alors
$$\left.\begin{matrix} f \text{ est} \\ \text{D.S.E. en }(0) \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \beta \in]0, \alpha] \text{ tel que la suite } (R_n(f))(x) \\ \text{converge simplement vers 0 sur }]-\beta; \beta[\\ \text{c.à.d. } \forall x \in]-\beta, \beta[\quad \lim_{n\infty} (R_n(f)(x)) = 0 \end{cases}$$

25 COROLLAIRE : C.N.S de DEVEL. EN S.E. EN 0 :

Soit $\alpha > 0$, $f :]-\alpha; \alpha[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$.
Pour que f soit développable en série entière en 0, il faut et il suffit qu'il existe
* $\beta \in]0, \alpha]$
* $A \in]0; +\infty[$
* $C \in]0; +\infty[$

tels que : $\forall x \in]-\beta; \beta[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |f^{(n)}(x)| \leqslant C.A^n.n!$

En particulier, si l'on a : $\exists K > 0$ $\exists \beta \in]0, \alpha[$ tels que $\forall x \in]-\beta; \beta[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f^{(n)}(x)| \leqslant K$, alors f est D.S.E.(0)

26 OPERATIONS SUR LES APPLICATIONS DEV. EN S.E. :

Soit f et g deux applications développables en S.E. en 0, de développements respectifs $\sum_0^{\infty}{}' a_n x^n$ et $\sum_0^{\infty}{}' b_n x^n$, et $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors :

a) $(f+g)$ est D.S.E.(0) et son dévelop. en S.E est $\sum_0^{\infty}{}' (a_n + b_n) x^n$

b) (λf) est D.S.E.(0) et son dévelop. en S.E est $\sum_0^{\infty}{}' (\lambda a_n) x^n$

c) $(f.g)$ est D.S.E(0) et son dévelop. en S.E. est le produit de Cauchy de $(\sum' a_n x^n)$ et de $(\sum' b_n x^n)$

d) f' est D.S.E(0) et son dévelop. en S.E. est obtenu en dérivant terme-à-terme celui de f, c'est-à-dire :
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' n a_n x^{n-1} = \sum_0^{\infty}{}' (n+1) a_{n+1} x^n$$

e) Les dérivées successives de f et les "primitives successives" de f sont D.S.E(0), et les développements en série correspondants s'obtiennent bien sûr en dérivant ou en primitivant le développement de f le nombre de fois nécessaires.

f) Toute fraction rationnelle F n'admettant pas 0 pour pôle est développable en S.E. en 0, et le rayon de convergence du développement en 0 est le minimum des modules des pôles COMPLEXES de F

27 EXPONENTIELLE COMPLEXE :

a) La S.E. complexe $\sum_0^{\infty}{}' \frac{1}{n!} z^n$ est de RCV ∞. Sa somme est appelée EXPONENTIELLE COMPLEXE : $\forall z \in \mathbb{C}$ $\exp(z) = e^z = \sum_0^{\infty}{}' \frac{1}{n!} z^n$

b) α) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$ $\quad e^z . e^{z'} = e^{z+z'}$
β) $\forall m \in \mathbb{N}^*$ $\forall (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ $\quad \prod_{k=1}^{m} e^{z_k} = e^{(z_1 + z_2 + \dots + z_m)}$
γ) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
δ) $\forall n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad (e^z)^n = e^{nz}$
ε) $\forall z \in \mathbb{C}$ $\quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$; $|e^z| = e^{\mathcal{Re}(z)}$; $e^z = 1 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R}$ $z = i\alpha$

28 COS, SIN, CH, SH COMPLEXES : a) ils sont définis par :

$\forall z \in \mathbb{C}$ $\begin{cases} \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \; ; \; \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \\ ch(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \; ; \; sh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \end{cases}$

b) $\forall z \in \mathbb{C}$ on a :

$\cos(z) = \sum_0^{\infty}{}' \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$; $\sin(z) = \sum_0^{\infty}{}' \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$ch(z) = \sum_0^{\infty}{}' \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $sh(z) = \sum_0^{\infty}{}' \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(iz) = ch(z)$; $\sin(iz) = i\,sh(z)$

$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$; $ch^2(z) - sh^2(z) = 1$