10 SUITE — REGLE DE CAUCHY, suite :

(Supposons...) que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe et vaut λ. Alors :

* si $\lambda < 1$, $\sum_1^\infty{}' u_k$ converge
* si $\lambda > 1$, $\sum_1^\infty{}' u_k$ diverge
* si $\lambda = 1$, cas douteux : indétermination.

b) Règle de Cauchy pour les S.E. :

Soit $\sum_0^\infty{}' a_n z^n$ une S.E. Si on a $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda$ avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le RCV de $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$ (avec par convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

11 REMARQUES :

a) Cauchy, comme d'Alembert, peut s'avérer inapplicable, alors que le RCV peut être immédiat :
Exemple : $\sum_0^\infty{}' z^{2n}$

b) on peut montrer que si la règle de d'Alembert s'applique pour une S.E., alors la règle de Cauchy s'applique aussi pour la même série entière. La réciproque est fausse.

c) Une formule générale, mais d'usage peu commode : on peut montrer que pour toute série entière $\sum' a_n z^n$, le RCV est donné par $\frac{1}{\rho}$ où

$$\boxed{\rho = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{p \geq n} |a_p|^{1/p}\right)}$$

12 SERIES DERIVEES. SERIE PRIMITIVE :

Soit $\sum_0^\infty{}' a_n z^n$ une série entière de RCV $R > 0$

a) La série entière "dérivée" $\sum_{n=1}^\infty{}' n a_n x^{n-1}$ a le $\boxed{\text{MÊME}}$ rayon de convergence R

b) $\forall p \geq 1$, la série entière "dérivée p-fois"
$$\sum_{n=p}^\infty{}' n(n-1)\cdots(n-(p-1))\, a_n z^{n-p}$$
a le $\boxed{\text{MÊME}}$ rayon de convergence R

c) la série entière "primitive" $\sum_0^\infty{}' \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ a le $\boxed{\text{MÊME}}$ rayon de convergence R

13 STRUCTURE VECTORIELLE :

Soit $\sum_{n=0}^\infty{}' a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^\infty{}' b_n z^n$ deux séries entières de RCV respectifs R_a et R_b, et de sommes respectives S_a et S_b. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$

a) La série entière $\sum_0^\infty{}' (\lambda a_n) z^n$ a comme RCV R_a et $\forall z \in \mathbb{C}$ $\left(|z| < R_a \Rightarrow \sum_0^\infty{}' (\lambda a_n) z^n = \lambda S_a(z)\right)$

b) La série entière $\sum_0^\infty{}' (a_n + b_n) z^n$ est appelée SOMME des 2 S.E. $\sum_0^\infty{}' a_n z^n$ et $\sum_0^\infty{}' b_n z^n$. Notons son rayon R_{a+b} et sa somme S_{a+b}.
On a alors :

α) $\boxed{R_{a+b} \geq \mathrm{Min}(R_a, R_b)}$

β) $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \Rightarrow S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)$

c.à.dire $\sum_0^\infty{}' (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_0^\infty{}' a_n z^n\right) + \left(\sum_0^\infty{}' b_n z^n\right)$

γ) Si $R_a \neq R_b$, Alors $R_{a+b} = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

c) Séries DISJOINTES : $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont disjointes ssi : $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \cdot b_n = 0$
on a alors $R_{a+b} = \mathrm{Min}(R_a, R_b)$

14 PRODUIT DE CAUCHY DE DEUX SERIES ENTIERES :

a) On appelle "série entière PRODUIT" des 2 S.E. $\sum' a_n z^n$ et $\sum' b_n z^n$ la S.E. $\sum' c_n z^n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$

b) Soit $\sum_0^\infty{}' a_n z^n$ et $\sum_0^\infty{}' b_n z^n$ 2 S.E. de rayons et de sommes respect. R_a, R_b et S_a, S_b. Soit $\sum_0^\infty{}' c_n z^n$ la série produit, de rayon R_c et de somme S_c. Alors :

α) $\boxed{R_c \geq \mathrm{Min}(R_a, R_b)}$

β) $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b) \Rightarrow S_c(z) = S_a(z) \cdot S_b(z)$

c.à.dire pour $|z| < \mathrm{Min}(R_a, R_b)$
$$\sum_0^\infty{}' c_n z^n = \left(\sum_0^\infty{}' a_n z^n\right)\left(\sum_0^\infty{}' b_n z^n\right)$$

γ) Remarque : ici on peut avoir $R_c > \mathrm{Min}(R_a, R_b)$ même si $R_a \neq R_b$

15 SERIE ENTIERE "REELLE" :

Soit $\sum' a_n z^n$ une S.E. de RCV $R > 0$ et de somme S. On s'intéresse ici à la restriction de S à $]-R; R[$, encore notée S. Alors :

a) L'application S est $\boxed{\mathcal{C}^\infty \text{ sur }]-R; R[}$

b) $\forall k \geq 0$ $\forall x \in]-R; R[$

(on peut dériver "terme à terme")

$$\boxed{S^{(k)}(x) = \left(\sum_0^\infty{}' a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n=k}^\infty{}' n(n-1)\cdots(n-(k-1))\, a_n x^{n-k}}$$

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^\infty{}' \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

c) En particulier $\forall k \geq 0$ $\boxed{a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}}$

d'où $\forall x \in]-R, R[$ $S(x) = \sum_0^\infty{}' a_n x^n = \sum_0^\infty{}' \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$

d) $\forall x \in]-R, R[$

(on peut intégrer "terme à terme")

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_0^\infty{}' a_n t^n\right) dt = \sum_0^\infty{}' a_n \int_0^x t^n\,dt$$

$$\boxed{\int_0^x S(t)\,dt = \sum_0^\infty{}' \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}$$

e) $\forall k \in \mathbb{N}$ la somme partielle de rang k $\sum_{n=0}^k a_n x^n$ fournit le Développement limité à l'ordre k en 0 de S

16 CONSEQUENCES :

a) Si deux séries entières ont la même somme en tout point d'un voisinage de 0, leurs coefficients sont IDENTIQUES.

b) Si une série entière $\sum_0^\infty{}' a_n x^n$ a pour somme 0 en tt point d'un vois. de 0, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 0$

c) Si la somme d'une série entière $\sum_0^\infty{}' a_n x^n$ est une fonction PAIRE, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{2n+1} = 0$

d) Si la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ est une fonction IMPAIRE, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{2n} = 0$

17 PRINCIPE DES "ZEROS ISOLES" :

Soit $\sum' a_n z^n$ une S.E. de RCV $R > 0$ et de somme S. S'il existe une suite $(z_p)_{p \geq 0}$ de complexes non nuls qui tend vers 0 avec : $\forall p \geq 0$ $S(z_p) = 0$, alors $\forall n \geq 0$ $a_n = 0$

18 FORMULE DE CAUCHY, EGALITE DE PARSEVAL :

Soit $\sum_0^\infty{}' a_n z^n$ une S.E. de RCV $R > 0$ et de somme S sur $D(0; R)$. Alors :

a) (Formule de Cauchy) $\forall r \in]0, R[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,d\theta$