SERIES ENTIERES (feuille 1)

0 Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
on appellera SERIE ENTIERE toute série d'applications $\sum_{n=0}^{\infty}{}' u_n(x)$
où $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in \mathbb{K} \; : \; u_n(x) = a_n x^n \quad (x \in \mathbb{K})$
(Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il s'agit d'une S.E. réelle, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'une S.E. complexe)

1 LEMME D'ABEL : Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la SUITE $(a_n z_0^n)_{n \geq 0}$ soit BORNEE. Alors :
a) $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < |z_0|$, la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ est ABS. CONV.
b) Pour tout r : $0 < r < |z_0|$, la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ est NORMALEMENT CONVERGENTE sur le disque $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq r\}$

2 RAYON DE CONVERGENCE : Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une série entière.
a) L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+;\ \sum' |a_n| r^n \text{ converge}\}$ est un INTERVALLE d'origine 0 (qui peut être réduit à $\{0\}$)
b) Théorème - définition : Il existe un UNIQUE élément R de $[0, +\infty]$ tel que :
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \begin{cases} |z| < R \Rightarrow (\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n \text{ CV. ABS.}) \\ |z| > R \Rightarrow ((a_n z^n)_{n \geq 0} \text{ non bornée}) \end{cases}$$
Cet élément R de $[0, +\infty]$ s'appelle le RAYON DE CONVERGENCE (abr : R.C.V.) de la série $\sum' a_n z^n$
c) Corollaire utile : Si R est le RCV de $\sum' a_n z^n$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $((a_n z^n)_{n \geq 0} \text{ bornée}) \Rightarrow |z| \leq R$
$(\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n \text{ non ABS. CONV}) \Rightarrow |z| \geq R$
d'où
$$\boxed{\begin{cases} \sum_0^{\infty}{}' a_n z^n \text{ CV} \Rightarrow |z| \leq R \\ \sum_0^{\infty}{}' a_n z^n \text{ DV} \Rightarrow |z| \geq R \end{cases}}$$
d) Si R est le RCV de $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$, on a :
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+;\ \sum_1' |a_n| r^n \text{ converge}\}$
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+;\ \sum' a_n r^n \text{ converge}\}$
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+;\ \lim_{n \infty} |a_n| r^n = 0\}$
$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+;\ (a_n r^n)_{n \geq 0} \text{ suite BORNEE}\}$
$R = \sup\{|z|;\ z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum' a_n z^n \text{ est ABS. CONV}\}$
$R = \sup\{|z|;\ z \in \mathbb{C} \text{ et } \sum' a_n z^n \text{ est CONV}\}$
$R = \sup\{|z|;\ z \in \mathbb{C} \text{ et } \lim_{n \infty} (a_n z^n) = 0\}$
$R = \sup\{|z|;\ z \in \mathbb{C} \text{ et } (a_n z^n)_{n \geq 0} \text{ suite BORNEE}\}$

3 REMARQUES : Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une SE et R son RCV
a) $R = 0 \Longleftrightarrow (\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0)$
$R = +\infty \Longleftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C} \quad \sum_0^{\infty}{}' a_n z^n \text{ converge})$
b) les deux S.E. $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ et $\sum_0^{\infty}{}' |a_n| |z|^n$ ont le MEME Rayon de Convergence.
c) Lorsque $|z| = R$ (R étant RCV de $\sum a_n z^n$) on ne peut "en général" RIEN dire de simple quant au comportement de la suite $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ ou de la série $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$. Exemples :
α) $\sum_0^{\infty}{}' z^n$: $R = 1$; $\forall z \in \{z; |z| = 1\}$ $\sum_0^{\infty}{}' z^n$ DIV.
β) $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$: $R = 1$; en 1, $\sum \frac{z^n}{n}$ Div et pour tout z de $\{z; |z| = 1\}$ distinct de 1, $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n}$ CONV.
γ) $\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$: $R = 1$; $\forall z \in \{z; |z| = 1\}$ $\sum_1^{\infty}{}' \frac{z^n}{n^2}$ CONV.
d) Eu égard à ce qui précède, l'ensemble $\{z;\ |z| = R\}$, souvent appelé à tort cercle de convergence, sera plutôt nommé CERCLE d'INCERTITUDE
e) L'ensemble $\{z;\ |z| < R\}$ est appelé DISQUE OUVERT DE CONVERGENCE (ABSOLUE) de $\sum' a_n z^n$
f) Il est important de noter que le RCV de $\sum' a_n z^n$ ne dépend que du module $|a_n|$ des a_n
g) Si il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_0^{\infty}{}' a_n z_0^n$ soit SEMI CONVERGENTE, alors $RCV = |z_0|$

4 SOMME D'UNE SERIE ENTIERE : Soit $\sum' a_n z^n$ une SE de RCV R. On appellera SOMME de la SE $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ l'application S du disque ouvert de CV dans $\mathbb{C}$ définie bien sûr par $S(z) = \sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$

5 COMPARAISONS DE RAYONS :
Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ et $\sum_0^{\infty}{}' b_n z^n$ deux SE de rayons resp. R_a et R_b
a) Si l'on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 \ |a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$
b) Si l'on a : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists M \in \mathbb{R}^{+*}$ $\forall n \geq n_0$ $|a_n| \leq M |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$
c) Si l'on a : $|a_n| \underset{n \infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$

6 CONVERGENCE NORMALE SUR DISQUE COMPACT :
Si $r_n \in]0; +\infty[$ on va appeler $\begin{cases} D(0, r_n) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r_n\} \\ \bar{D}(0, r_n) = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq r_n\} \end{cases}$
Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. de RCV $R > 0$, de somme S.
Soit r tel que $0 < r < R$. Alors
α) $\sum' a_n z^n$ converge absolument sur $D(0, R)$
β) $\sum' a_n z^n$ converge NORMALEMENT sur $\bar{D}(0, r)$
γ) $S(z)$ est donc CONTINUE sur $D(0, R)$
δ) $S(z)$ est uniformément continue sur $\bar{D}(0, r)$

7 REGLE DE D'ALEMBERT :
a) Rappel de la règle de d'Alembert pour les STP :
Soit $\sum_0^{\infty} u_n$ une série à termes > 0. Supposons que $\lim_{n \infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lambda$ existe. Alors :
* si $\lambda < 1$, $\sum_0^{\infty} u_n$ converge
* si $\lambda > 1$, $\sum_0^{\infty}{}' u_n$ diverge
* si $\lambda = 1$, cas douteux, indétermination.

b) Règle de d'Alembert pour les S.E. :
Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. Si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\begin{cases} \forall n \geq n_0 \quad |a_n| \neq 0 \\ \lim_{n \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \text{ existe et vaut } \lambda \in [0; +\infty] \end{cases}$
Alors le RCV de $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\lambda}$
(avec les conventions usuelles : $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$)

8 COROLLAIRE IMPORTANT DE D'ALEMBERT :
Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. on suppose qu'il existe une FRACTION RATIONNELLE non nulle de $\mathbb{C}(X)$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = F(n)$.
Alors le RCV de $\sum' a_n z^n$ est 1.

9 QUELQUES REMARQUES SUR D'ALEMBERT :
a) Soit $\sum_0^{\infty}{}' a_n z^n$ une S.E. si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ n'a pas de limite dans $[0, +\infty]$, la règle de d'Alembert pour les SE est inapplicable. Exemple : $\sum_0^{\infty}{}' \sin(n) z^n$ est de RCV 1 (car $\forall z$ tel que $|z|$ $\sum_0^{\infty}{}' \sin(n) z^n$ CV, et $\sum_0^{\infty}{}' \sin(n)$ diverge) mais $\left|\frac{\sin(n+1)}{\sin(n)}\right|$ n'a pas de limite dans $[0; +\infty]$.
b) La règle de d'Alembert pour les SE est inapplicable aux séries entières du type :
$\sum_0^{\infty}{}' a_n Z^{2n}$, $\sum_0^{\infty}{}' a_n Z^{\alpha n + \beta}$, $\sum_0^{\infty}{}' a_n Z^{n^2}$ ...
Pour de telles séries, on pourra essayer
* la règle de d'Alembert pour les STP (z fixé)
* un chang. de variables du type $u = z^m$.

10 REGLE DE CAUCHY :
a) Rappel de la règle de Cauchy pour les STP :
Soit $\sum_0^{\infty} u_n$ une série à termes ≥ 0. Supposons ..... →