Séries entières

1 Rayon de convergence

(*Dans la suite* K *désigne* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.)

a. On appelle série entière toute série d'applications dont le terme général est de la forme : $u_n(x) = a_n x^n$ $((a_n, x) \in K^2)$.

b. **Théorème et définition** : Il existe un et un seul $R \in [0; +\infty]$ tel que

$$\begin{cases} |x| < R \Rightarrow \sum a_n \cdot x^n \text{ est une série absolument convergente} \\ |x| > R \Rightarrow \sum a_n \cdot x^n \text{ est une série divergente.} \end{cases}$$

On appelle disque de convergence l'ensemble ouvert $D = \{x \in K ; |x| < R\}$.
R est le **rayon de convergence** de la série entière (on notera aussi $R = \rho(a_n)$).
Pour $|x| > R$, le terme général ne tend pas vers zéro.
Pour $|x| = R$, on ne peut conclure (le résultat dépend de la série et de x).

c. • S'il existe $\lambda = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ $(\lambda \in \dot{\mathbb{R}}^+)$, alors $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

(Avec les conventions : $\dfrac{1}{0} = \infty$ et $\dfrac{1}{\infty} = 0$.)

• De même, s'il existe $\lambda = \lim\limits_{n} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, alors $R = \dfrac{1}{\lambda}$.

• Si l'on a, à partir d'un certain rang : $|a_n x^n| \leq |b_n x^n|$, alors :

$$\rho(b_n) \leq \rho(a_n).$$

2 Séries dérivées

$u_n(x) = a_n x^n$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
La série entière $u_n'(x) = n a_n x^{n-1}$ (série dérivée) a même rayon de convergence R.
Il en est de même de $u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-(k-1))\, a_n x^{n-k}$ ainsi que de w_n :

$$w_n(x) = a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3 Convergence uniforme. Théorèmes généraux

Une série entière de rayon de convergence positif R converge uniformément sur tout disque fermé $B_f(0, \rho)$ avec $\rho < R$:

$$B_f(0, \rho) = \{z \in K \,|\, |z| \leq \rho\}.$$

Théorème 1 : (Continuité)
La somme d'une série entière est continue dans son disque de convergence.

Théorème 2 : On peut intégrer terme à terme une série entière réelle (i.e. : $x \in \mathbb{R}$, $a_n \in K$) dans son intervalle de convergence, c'est-à-dire :

$$(\forall x \in]-R, +R[) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{a_n x^n}{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n t^n\right) dt.$$

(La série entière obtenue a même rayon de convergence R.)

Théorème 3 : On peut dériver terme à terme une série entière réelle (i.e. : $x \in \mathbb{R}$; $a_n \in K$) dans son disque de convergence ; donc :

$$(\forall x \in]-R, +R[) \quad \sum_{n \geq 0} n a_n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a^n x^n\right).$$

(La série obtenue par dérivation a même rayon de convergence R.)

Corollaire. La somme f d'une série entière de rayon de convergence positif R est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dans $]-R, R[$. La dérivée $f^{(k)}$ s'obtient par dérivation terme à terme :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} n(n-1)\dots(n-(k-1))\, a_n x^{n-k}.$$

Toutes les séries ainsi obtenues ont même rayon de convergence R.

Théorème 4 : Si $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge vers S, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[0; 1]$ et on aura donc :

$$\lim_{x \to 1} \left(\sum_0^\infty a_n x^n\right) = S$$

4. Somme et produit de séries entières

Définition : Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. Leur **SOMME** $(A+B)$ est la série entière $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$. Leur **PRODUIT** AB est la série entière

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n, \quad \text{où } \forall n \geq 0 \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

Théorème : Soit $A = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $B = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence $\rho(A)$ et $\rho(B)$ sont non nuls. Alors chacune des séries ent. $(A+B)$ et AB a un rayon de convergence AU MOINS EGAL à $\inf(\rho(A), \rho(B))$. De plus

$\forall z$ avec $|z| < \inf(\rho(A), \rho(B))$

$$\sum_0^\infty (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_0^\infty a_n z^n\right) + \left(\sum_0^\infty b_n z^n\right) \quad \text{et}$$

$$\sum_0^\infty c_n z^n = \left(\sum_0^\infty a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_0^\infty b_n z^n\right)$$

Remarque : si $\rho(A) \neq \rho(B)$, le rayon de convergence de $(A+B)$ est $\inf(\rho(A), \rho(B))$

5 Séries entières réelles

Dans ce paragraphe $a_n \in K$ et $x \in \mathbb{R}$

Théorème 1 : Soit $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la somme d'une série entière réelle de rayon de convergence positif. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang k fournit un développement limité de f à l'origine, à l'ordre k.

Théorème 2 : Si $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \quad \text{(formules de Mac Laurin).}$$

Conséquences : * Si 2 séries entières ont la même somme en tout point d'un voisinage de 0, leurs coeff. sont les mêmes.
* Si une série ent. a pour somme 0 en tout point d'un voisinage de 0, tous les coeff. $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sont nuls.
* Si la somme d'une série est une fonction paire (resp. impaire), les coeff. des termes de puissance impaire (resp. paire) sont nuls.

Développement en série
Soit f une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage I de zéro. On dit que f est **développable en série**, s'il existe un voisinage J de zéro tel que f soit somme d'une série entière sur $I \cap J$.
Si f est $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de zéro, on appelle **série de Mac Laurin** associée à f la série entière :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Pour que f soit développable en série, il faut et il suffit que la série de Mac Laurin de f converge vers f sur un voisinage de zéro.

Théorème 3 : Soit f une fonction numérique de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage J de zéro. Pour que f soit développable en série, il suffit que la suite $f^{(n)}$ soit bornée sur J, c'est-à-dire :

$$(\exists K > 0)(\forall u \in J)(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |f^{(n)}(u)| \leq K.$$

Remarque : La condition $|f^{(n)}(u)| \leq K^n$ est aussi suffisante.

6 Développements en série usuels (fonctions réelles)

$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n$	$t \in \mathbb{R}$
$a^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\operatorname{Log} a)^n}{n!} t^n$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$t \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{a-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{n+1}} t^n$ $(a \in \mathbb{C}^*)$	$t \in]-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert[$
$\frac{1}{(a-t)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{n+p-1}^{p-1}}{a^{n+p}} t^n$ $((a, p) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{N}^*)$	$t \in]-\lvert a \rvert, \lvert a \rvert[$
$\operatorname{Log}(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n$	$t \in]-1, 1]$
$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$t \in]-1, 1[$ ($\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$)
$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$t \in \mathbb{R}$
$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$	$t \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Arc\,sin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$	$t \in [-1, 1]$
$\operatorname{Arc\,tg} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$	$t \in [-1, 1]$
$\operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$t \in \mathbb{R}$
$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$	$t \in \mathbb{R}$
$\operatorname{Arg\,sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$	$t \in [-1, +1]$
$\operatorname{Arg\,th} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$	$t \in]-1, 1[$