Systèmes d'équations linéaires - Méthode du pivot de Gauss

1 Un cas simple : 2 équations, 2 inconnues

On cherche à résoudre le système suivant, d'inconnues x et y.

$$(S)\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=p \end{cases}$$

Quitte à échanger les deux lignes, on peut supposer que $a \neq 0$. Notre système est alors équivalent à

$$\begin{cases} ax+by=m \\ a(cx+dy)=ap \end{cases}$$

On peut alors utiliser la première ligne pour "se débrasser de x" dans la deuxième : (S) est encore équivalent à

$$\begin{cases} ax+by=m \\ a(cx+dy)-c(ax+by)=ap-cm \end{cases}$$

autrement dit

$$\begin{cases} ax+by & =m \\ (ad-bc)y & =ap-cm \end{cases}$$

Tout dépend donc de $ad-bc$:

- Si $ad-bc \neq 0$, il y a une unique solution :

$$y=\frac{ap-cm}{ad-bc},\ x=\frac{md-bp}{ad-bc}$$

- Si $ad-bc=0$, deux cas se présentent :
  - Soit $ap-cm \neq 0$. Auquel cas le système n'a aucune solution.
  - Soit $ap-cm=0$. Alors le système est équivalent à $ax+by=m$, ou encore $x=\frac{m}{a}-\frac{b}{a}y$. Il y a alors une infinité de solutions : chaque choix de y donne un x tel que (x,y) soit solution de (S) (on dira que y est un paramètre).

Inteprétation matricielle : Le système (S) se réécrit $AX=B$ avec

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$$

Il y a alors une unique solution ssi A est inversible, autrement dit ssi $det(A)=ad-bc \neq 0$. Cette solution est alors donnée par $X=A^{-1}B$, où

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ donc } X=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} md-pb \\ -cm+ap \end{pmatrix}.$$

Inteprétation géométrique[1] : Les lignes de (S) sont des équations de droites : $D_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, ax+by=m\}$ et $D_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, cx+dy=p\}$.

Si $ad-bc \neq 0$, alors ces deux droites ont des pentes différentes, et donc ont un unique point d'intersection : ce qui revient à dire que (S) a une unique solution. Si $ad-bc=0$, les deux droites ont la même pente : dans ce cas, elles sont soient confondues, soit parallèles.

Pour départager ces deux cas, regardons les points d'intersection avec l'axe $\{y=0\}$. Sur D_1, c'est le point tel que $ax=m$; autrement dit $(\frac{m}{a},0)$. Sur D_2, c'est le point $(\frac{p}{c},0)$. S'ils sont égaux, on a $\frac{m}{a}=\frac{p}{c}$, ce qui se réécrit $ap=cm$, et dans ce cas les droites sont confondues et (S) a une infinité de solutions. Sinon, $ap \neq cm$ et les droites sont parallèles : il n'y a pas de point d'intersection, donc (S) n'a pas de solution.

1. on suppose ici a,b,c,d non nuls, mais le raisonnement s'étend aux autres cas (vérifiez-le !)

2 Cas général :

On va étendre ces idées à des systèmes un peu plus gros : on cherche à résoudre un système de n équations à p inconnues :

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On va utiliser les faits suivants [2] :

- $\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A' = B' \\ A = B \end{cases}$
- Si $\alpha \neq 0$, $A = B \iff \alpha A = \alpha B$.
- Pour tout réel λ, $\begin{cases} A = B \\ A' = B' \end{cases} \iff \begin{cases} A = B \\ A' + \lambda A = B' + \lambda B \end{cases}$

On en déduit qu'on peut appliquer les *opérations élémentaires* suivantes au système (S) sans en changer les solutions :

- l'échange de deux lignes : $\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$
- la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* α : $\boxed{L_i \leftarrow \alpha L_i}$
- l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre : $\boxed{L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j}$

En imitant le cas simple à deux inconnues, on va utiliser ces règles pour se ramener à un système plus facile à résoudre. C'est l'algorithme du *pivot de Gauss* : on va utiliser un coefficient non nul devant une inconnue x_i pour se "débarasser" de x_i dans les lignes en dessous. On élimine ainsi de plus en plus de variables. Plus précisément :

1. Si $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{n1} = 0$, alors on a en fait un système de $x_2, \ldots, x_p$. On peut alors prendre n'importe quelle valeur pour x_1 (c'est un paramètre) et on résoud le système à $p-1$ inconnues $x_2, \ldots, x_p$.
2. Supposons maintenant qu'un des $a_{i1} \neq 0$. Quitte à échanger la première et la i-ème ligne, on peut même supposer que $a_{11} \neq 0$. On utilise alors a_{11} comme "pivot" pour éliminer x_1 dans toutes les autres équations via l'opération $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$ pour $k = 2 \ldots n$. Le système (S) est donc équivalent à

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad 0 + \alpha'_{22}x_2 + \ldots \qquad\qquad = b'_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad 0 + \alpha'_{n2}x_2 + \ldots \qquad\qquad = b'_n \end{cases}$$

3. On recommence ! Si l'un des α'_{k2} est non nul, on échange L_2 et L_k pour le "mettre en haut". On peut donc supposer $\alpha'_{22} \neq 0$, et on utilise ce pivot pour éliminer x_2 dans les autres équations en utilisant $L_j \leftarrow L_j - \frac{\alpha'_{j2}}{\alpha'_{22}} L_2$. Si tous les α'_{k2} sont nuls, c'est-à-dire si x_2 n'apparaît plus que dans la première ligne, on regarde les α'_{k3} et on procède de même.
4. En éliminant les inconnues une par une, on se ramène ainsi à un système *échelonné*, c'est-à-dire tel que le nombre de coefficients nuls au début de chaque ligne est strictement croissant. Il est donc de la forme

2. Ils ont l'air évidents, mais vérifiez quand même que ce sont bien des équivalences !

$$(SE)\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + & + a'_{1p}x_p & = b'_1 \\ \quad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + & + a'_{2p}x_p & = b'_2 \\ & & \vdots \\ & a'_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a'_{rp}x_p & = b'_r \\ & 0 & = b'_{r+1} \\ & & \vdots \\ & 0 & = b'_n \end{cases}$$

où on a $1 < j_2 < \cdots < j_r \leq p$, et où les "pivots" $a'_{11}, a'_{2j_2}, \ldots, a'_{rj_r}$ sont tous non nuls. On appelle *inconnues principales* les inconnues associées $x_1, x_{j_2} \ldots x_r$ et *inconnues libres* les autres inconnues.

(SE) est *équivalent* à S : $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (SE) si, et seulement si il est solution de (S). Et (SE) est beaucoup plus facile à interpréter !

On appelle *rang* du système (S) l'entier r. Il correspond au nombre de pivots, donc au nombre d'inconnues principales. On a donc

$$\boxed{r \leq n} \quad \boxed{r \leq p} \quad \boxed{p = r + \text{ nb d'inconnues libres}}$$

Résolution : On a alors différents cas :

- Si l'un des $b'_{r+1}, \ldots, b'_n$ est non nul, le système n'a pas de solution. Ce cas ne se produit que si $r < n$.
- Sinon, si $b'_{r+1} = \cdots = b'_n = 0$, en ôtant les lignes $0 = 0$, on voit que le système est équivalent à

$$(SE')\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + & + a'_{1p}x_p & = b'_1 \\ \quad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + & + a'_{2p}x_p & = b'_2 \\ & & \vdots \\ & a'_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a'_{rp}x_p & = b'_r \end{cases}$$

Alors,

– si $r = p$ in n'y a pas d'inconnues libres, le système est triangulaire :

$$(SE')\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + & + a'_{1p}x_p & = b'_1 \\ \quad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + & + a'_{2p}x_p & = b'_2 \\ & & \vdots \\ & a'_{rp}x_p & = b'_r \end{cases}$$

et admet une unique solution, qu'on obtient "en remontant" : $x_p = \frac{b'_r}{a'_{rp}}$, d'où l'on déduit x_{r-1} en remplaçant x_r par sa valeur dans la ligne L_{r-1}, d'où l'on déduit x_{r-2}, etc.

– si $r < p$, les inconnues $(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_p)$ sont libres. On écrit :

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1j_r}x_{j_r} & = b'_1 - a'_{1j_{r+1}}x_{j_r+1} - \cdots - a'_{1p}x_p \\ \quad a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2j_r}x_{j_r} & = b'_2 - a'_{2j_{r+1}}x_{j_r+1} - \cdots - a'_{2p}x_p \\ & \vdots \\ a'_{rj_r}x_{j_r} & = b'_r - a'_{rj_{r+1}}x_{j_r+1} - \cdots - a'_{rp}x_p \end{cases}$$

et pour chaque choix d'inconnues libres $(x_{j_{r+1}}, \ldots, x_p)$, on a une solution. Il y a donc une infinité de solutions.

Il y a donc trois cas possibles pour l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ d'un système d'équation linéaires (S) :

1. Soit il n'y a aucune solutions : $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$;
2. Soit il y a une unique solution $\boxed{\mathcal{S} = \{X_0\}}$;

3. Soit il y a une infinité de solutions, dépendant (linéairement !) du choix de $p-r$ inconnues libres $y_1,\dots y_{p-r}$: $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\left(c_1+\sum_{i=1}^{p-r}\lambda_{1i}y_i,\dots,c_p+\sum_{i=1}^{p-r}\lambda_{pi}y_i\right),y_1,\dots,y_{p-r}\in\mathbb{R}\right\}}$;

Systèmes homogènes : Dans le cas particulier où le second membre est nul ($b_1=\cdots=b_n=0$), on dit que le système est *homogène*. Un système homogène admet toujours au moins la solutions nulle $x_1=\cdots=x_p=0$. Il n'y a donc que deux cas possibles :

- soit le rang du système est égal au nombre d'inconnues, et la $(0,\dots,0)$ est la seule solution ;
- soit le rang est strictement inférieur au nombre d'inconnues, et il y a alors, en plus de $(0,\dots,0)$, une infinité de solutions non nulles.

En particulier, un système homogène qui a plus d'inconnues que d'équations a toujours une infinité de solutions.

Interprétation matricielle : Comme dans le cas simple à deux inconnues, on peut représenter matriciellement le système (S). Appelons $A=(a_{ij})_{1\le i\le n,1\le j\le p}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la *matrice des coefficients* du système, et $B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ le second membre. Résoudre le système (S) revient donc à chercher $X=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ tel que $\boxed{AX=B}$. Alors, en interprétant A comme une application linéaire $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$, on peut interpréter l'existence et l'unicité des résultats comme suit :

- Le système a une solution si et seulement si $B\in\mathrm{Im}(A)$.
- Le rang du système (S) est le rang de la matrice A, c'est-à-dire $\dim\mathrm{Im}(A)$.
- On rappelle le théorème du rang : $\boxed{p=\mathrm{rg}(A)+\dim\mathrm{Ker}(A)}$. On avait déjà observé que $p=r+$ nb d'inconnues libres : on en déduit que le nombre d'inconnues libres est donné par la dimension du noyau de A.
- Dans le cas où $B=0$ (système homogène), l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\mathrm{Ker}(A)$.
- Plus généralement, si X et X' sont deux solutions de (S), alors $A(X-X')=B-B=0$ donc $X-X'\in\mathrm{Ker}(A)$. Autrement dit, si X est une solution de (S), l'ensemble de toutes les solutions est $\mathcal{S}=\{X+Z,Z\in\mathrm{Ker}(A)\}$.

Un exemple : On va résoudre le système à 4 inconnues et 3 équations suivants :

$$(S)\begin{cases} -x_2+2x_3+13x_4=5\\ x_1-2x_2+3x_3+17x_4=4\\ -x_1+3x_2-3x_3-20x_4=-1\end{cases}$$

Pour commencer, il faut que le coefficient devant x_1 dans la première ligne soit non nul. Ce n'est pas le cas, donc on commence par échanger les lignes L_1 et L_2 :

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+17x_4=4\\ -x_2+2x_3+13x_4=5\\ -x_1+3x_2-3x_3-20x_4=-1\end{cases}$$

On choisit alors comme premier pivot le coefficient 1 devant x_1 dans la ligne L_1. On va s'en servir pour éliminer x_1 dans les autres lignes. Pour L_2, comme x_1 n'y figure pas, on n'a rien à faire. On fait donc $L_3\leftarrow L_3+L_1$:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+17x_4=4\\ -x_2+2x_3+13x_4=5\\ x_2-3x_4=3\end{cases}$$

On utilise maintenant le pivot $-x_2$ au début de la deuxième ligne pour éliminer x_2 dans la troisième ligne via $L_3\leftarrow L_3+L_2$:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+17x_4=4\\ -x_2+2x_3+13x_4=5\\ 2x_3+10x_4=8\end{cases}$$

On a ainsi obtenu un système échelonné de rang 3. Les inconnues principales sont x_1, x_2 et x_3 et il y a une inconnue libre x_4. On exprime donc x_1, x_2, x_3 en fonction de celle-ci :

$$\begin{cases} x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_3 - 17x_4, \\ x_2 = -5 + 2x_3 + 13x_4, \\ x_3 = 4 - 5x_4 \end{cases}$$

et on "remonte" pour remplacer x_3 et x_2 par leurs valeurs en fonction de x_4 :

$$\begin{cases} x_1 & = 4 + 2x_2 - 3(4 - 5x_4) + 17x_4 = 4 + 2(3 + 3x_4) - 3(4 - 5x_4) - 17x_4 = -2 + 4x_4, \\ x_2 & = -5 + 2(4 - 5x_4) + 13x_4 = 3 + 3x_4, \\ x_3 & = 4 - 5x_4 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathcal{S} = \{(-2 + 4x_4, 3 + 3x_4, 4 - 5x_4, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}$.

Un exemple à paramètre : On va résoudre, en fonction du paramètre a, le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Le coefficient devant x dans la ligne L_1 est non nul, on peut donc s'en servir pour éliminer x dans L_2 et L_3 par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ \quad y + (a+2)z & = 1 \\ \quad (a-1)y + 4z & = 1 \end{cases}$$

Le coefficient devant y dans la ligne 2 étant non nul, on l'utilise comme pivot pour éliminer y dans la ligne 3 via $L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ \quad y + (a+2)z & = 1 \\ \quad (4 - (a+1)(a+2))z & = 2 - a \end{cases}$$

soit, en remarquant que $4 - (a-1)(a+2) = -a^2 + 4 + 6 = -(a-2)(a+3)$,

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ \quad y + (a+2)z & = 1 \\ \quad (a-2)(a+3)z & = a - 2 \end{cases}$$

Trois cas se présentent : soit $a = 2$, soit $a = -3$, soit a n'est ni l'un ni l'autre.

a) Si $a = 2$, la troisième ligne est $0 = 0$ et le système équivaut à

$$\begin{cases} x + y - z & = 1 \\ \quad y + 4z & = 1 \end{cases}$$

Il y a alors 2 variables principales x et y que l'on exprime en fonction de la variable libre z :

$$\begin{cases} x & = 1 - y + z = 5z \\ y & = 1 - 4z \end{cases}$$

Il y a donc une infinité de solutions $\mathcal{S} = \{(5z, 1 - 4z, z), z \in \mathbb{R}\}$.

b) Si $a = -3$ la dernière ligne est $0 = 1$: le système n'a aucune solution.

c) Si $a \neq 2$ et $a \neq -3$, le système est de rang 3 et admet une unique solution :

$$\begin{cases} x & = 1 - y + z = 1 \\ y & = 1 - (a+2)z = \frac{1}{a+3} \\ z & = \frac{1}{a+3} \end{cases}$$

d'où $\mathcal{S} = \left\{\left(1, \frac{1}{a+3}, \frac{1}{a+3}\right)\right\}$.