Ensembles de nombres

Entiers : Le minimum pour définir les entiers, c'est un point de départ (qu'on appelle 0) et un moyen de passer au suivant (qu'on note s comme successeur). C'est ce que formalisent les axiomes de Péano, qui stipulent qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{N}$, muni d'un élément 0 et d'une fonction $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que :

- 0 n'est le successeur d'aucun entier : $0 \notin s(\mathbb{N})$.
- s est injective : deux entiers ne peuvent avoir le même successeur que s'ils sont égaux.
- *Principe de récurrence :* Soit $A \subset \mathbb{N}$. Si A contient 0, et $a \in A \Rightarrow s(a) \in A$, alors $A = \mathbb{N}$ tout entier.

De ce dernier axiome, on déduit la méthode de démonstration par récurrence.

Méthode : Pour montrer qu'une propriété sur les entiers $P(n)$ est vraie pour tout n, on peut procéder par récurrence :

- *Initialisation* : On montre $P(0)$.
- *Hérédité :* On montre que $P(a) \Rightarrow P(s(a))$. Autrement dit, on suppose que P est vérifiée pour un entier a, et on montre que P est vérifiée pour son successeur.

Propriétés liées à l'ordre : On dispose sur $\mathbb{N}$ d'un ordre $\leq$, et donc on peut parler de maximum, minimum,etc. On a :

- Si $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, alors A a un plus petit élément.
- Si $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, et A est finie, alors A a un plus grand élément.

Arithmétique : Dans $\mathbb{N}$, on peut bien sûr additionner et multiplier. On dispose aussi de la *division euclidienne* : Pour tout couple d'entiers (a, b) tel que $b \neq 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r < b$ uniques tels que $\boxed{a = bq + r}$. On dit que q est le *quotient* et r le *reste* de la division euclidienne de a par b.

Si $r = 0$, on dit que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

Un entier $p \geq 2$ est *premier* s'il n'admet que deux diviseurs : 1 et p.

⚠ 1 n'est pas premier.

Les nombres premiers sont les "briques de construction" des autres entiers : Tout entier n peut se décomposer en produit de nombres premiers :

$$\boxed{n = \prod_i p_i^{k_i} \text{ avec } p_i \text{ premier } \forall i}$$

PPCM, PGCD : Soit (a, b) un couple d'entiers.

- On note $ppcm(a, b)$ le plus petit multiple commun de a et b.
- On note $pgcd(a, b)$ le plus grand diviseur commun de a et b. S'il est égal à 1, on dit que a et b sont *premiers entre eux.*
- On a la relation $\boxed{pgcd(a, b)ppcm(a, b) = ab}$.

⚠ Ceci n'implique pas que a ou b est premier. Par exemple, 12 et 49 sont premiers entre eux.
Si $a = p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n}$ et $b = p_1^{l_1} \dots p_n^{l_n}$ avec p_i alors

$$pgcd(a, b) = p_1^{\min(k_1,l_1)} p_2^{\min(k_2,l_2)} \dots p_n^{\min(k_n,l_n)}$$
$$ppcm(a, b) = p_1^{\max(k_1,l_1)} p_2^{\max(k_2,l_2)} \dots p_n^{\max(k_n,l_n)}$$

Méthode : algorithme d'Euclide On calcule le pgcd de a et b par la méthode itérative suivante :

1. Si $b = 0$, le pgcd est a. Sinon, on fait la division euclidienne : $a = bq_0 + r_0$.
2. Si $r_0 = 0$, le pgcd est b. Sinon, on fait la division euclidienne de b par r_0 : $b = r_0 q_1 + r_1$.
3. Si $r_1 = 0$, le pgcd est r_0. Sinon, on fait la division euclidienne de r_0 par r_1, etc.
4. On obtient ainsi $b > r_0 > r_1 > r_2$.... Le pgcd est le dernier reste non nul.

Rationnels : On appelle nombres *rationnels* les nombres de la forme $x = \frac{p}{q}$, avec p, q entiers tels que $q \neq 0$. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels.
Remarque : en simplifiant $pgcd(p, q)$ dans la fraction, on écrire $x = \frac{p'}{q'}$ avec p', q' entiers premiers entre eux.

Les nombres rationnels peuvent aussi s'écrire sous forme d'un *développement décimal* : $\frac{p}{q} = a_0, a_1 a_2 \dots$ Par exemple, $\frac{1}{3} = 0,33333$.... Les rationnels ont des développements décimaux qui se répètent au bout d'un moment.

Méthode : Pour passer d'une écriture à l'autre

- *De la fraction au décimal :* Soit $\frac{p}{q}$ un rationnel.
  1. On fait la division euclidienne de p par q : $p = a_0 q + b_0$, donc $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{b_0}{q}$.
  2. On fait la division de $10b_0$ par q : $10b_0 = a_1 q + b_1$ donc $\frac{b_0}{q} = a_1 10^{-1} + \frac{b_1}{10q}$.
  3. On fait la division de $10b_1$ par q : $10b_1 = a_2 q + b_2$ donc $\frac{b_1}{10q} = a_2 10^{-2} + \frac{b_2}{10^2 q}$, et ainsi de suite
  4. On obtient $\frac{p}{q} = a_0 + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} ... = a_0, a_1 a_2 \dots$.
- *Du décimal à la fraction :* On utilise le fait que le développement décimal d'un rationnel se répète. Etudions-le sur un exemple. Cherchons l'écriture fractionnaire de $x = 1,011363636$....
  1. On met la partie répétitive d'un côté de la virgule, le reste de l'autre : $1000x = 1011,363636$....
  2. On soustrait la partie entière : $1000x - 1011 = 0,363636\dots$. Posons $y = 1000x - 1011$.
  3. On multiplie y par une puissance de 10 qui garde la même répétition après la virgule : ici
  $$100y = 36,3636363... = \boxed{36 + y}$$
  4. On a donc $99y = 36$ donc $y = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}$ et $x = \frac{y+1011}{1000} = \frac{11125}{11000} = \frac{88}{89}$

Réels : On définit l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels comme l'ensemble de tous les développements décimaux possibles (répétitifs ou non).

Contrairement à $\mathbb{N}$, certaines parties bornées de $\mathbb{R}$ n'ont pas de plus petit ou plus grand élément : par exemple $]0, 1[$. En revanche,

- Toute partie majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure
- Toute partie minorée de $\mathbb{R}$ a une borne inférieure.

Méthode : Pour montrer que $s \in E$ est la borne supérieure de $X \subset \mathbb{R}$, il faut montrer que :

1. s est un majorant de X, autrement dit que pour tout $x \in X$, $x \leq s$
2. si M est un majorant de X, alors $s \leq M$: s est le plus petit majorant.