Nombres complexes

- Inventés au XVIe siècle (Cardan, Bombelli) pour résoudre des équations d'ordre 3.

↳ Formule connue $(c, d > 0)$ $\quad x^3 + cx = d \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{c^3}{27}}}$

$\rightsquigarrow x^3 = cx + d \rightsquigarrow x = \sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\underbrace{\frac{d^2}{4}-\frac{c^3}{27}}}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{\underbrace{\frac{d^2}{4}-\frac{c^3}{27}}}}$

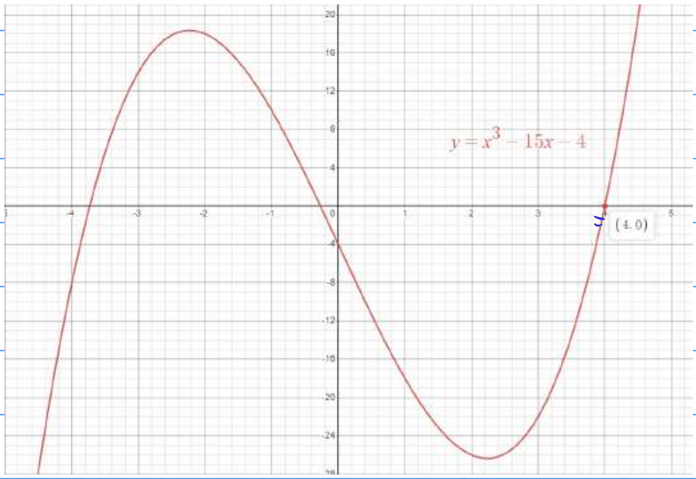
pourrait être négatifs !

- ex $x^3 = \underbrace{15}_{c}x + \underbrace{4}_{d}$

donc $\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27} = 4 - 125 = -121$

Donc, en théorie, $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$

→ Et pourtant, x devrait exister : cette équation a des solutions !



Bombelli : Tant pis pour $\sqrt{-1}$, on continue

On cherche $\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ sous la forme $a+b\sqrt{-1}$

$\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$ —— $a-b\sqrt{-1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b\sqrt{-1})^3 = 2+11\sqrt{-1} \\ (a-b\sqrt{-1})^3 = 2-11\sqrt{-1} \end{cases}$

Donc $a = 2$, $b = 1$

et donc $x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$

→ Avec cette astuce, on trouve la bonne réponse !

(Mais c'est quand même un peu illégal, alors on va dire que $\sqrt{-1}$ est "imaginaire" et on va le noter $i = \sqrt{-1}$)

→ Nombres complexes : $\mathbb{C} = \{a+bi,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Opérations sur $\mathbb{C}$: $z = a+bi$, $z' = c+di \in \mathbb{C}$

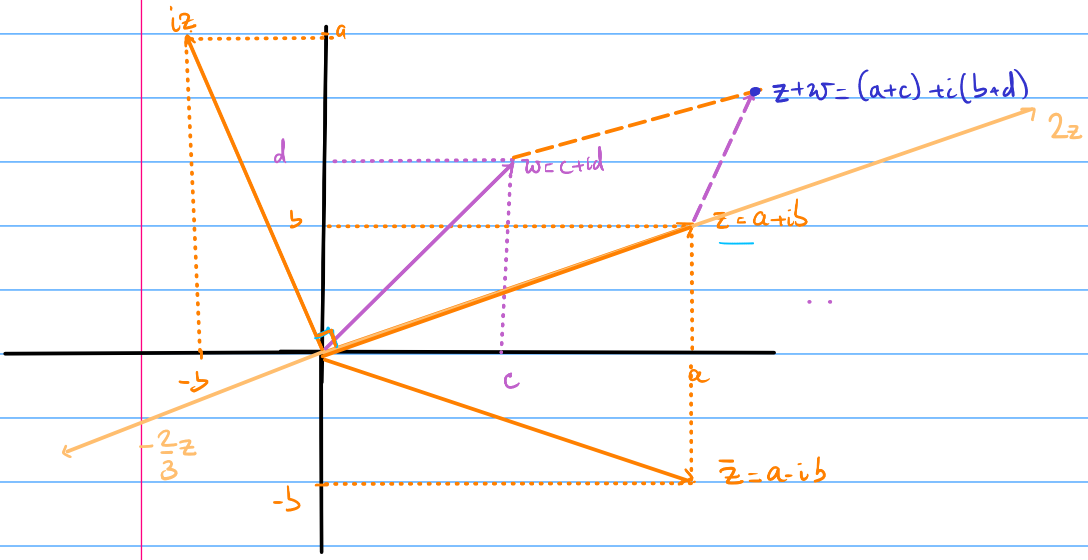
- Addition : $z+z' = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+i(b+d)$
- Multiplication : $zz' = (a+bi)(c+di) = ac + adi + cbi + bd\,i^2$ $\quad i^2 = -1$

$= (ac-bd) + i(ad+cb)$

- Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-\underbrace{(bi)^2}_{b^2i^2=-b^2}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$
- Division : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + i\,\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$
- Conjugué : $\bar{z} = a - ib$

Interprétation géométrique des complexes (Gauss, Argand)

→ On associe, à chaque complexe $z = a+ib$, le point (a,b) du plan :



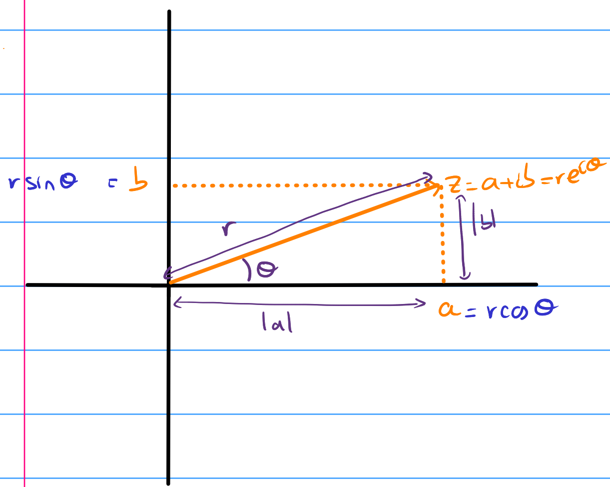
→ Addition = addition vectorielle

→ Multiplication
- $c \in \mathbb{R}$: $cz = ca + icb$: multiplication du "vecteur" z par c
- $iz = i(a+ib) = ia + \underbrace{i^2}_{-1} b = -b + ia$: rotation de $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens trigonométrique)

$$(c+di)(a+ib) = \underbrace{c(a+ib)}_{\text{c fois le vecteur z}} + \underbrace{d(-b+ia)}_{\text{d fois le vecteur rotationné}}$$

→ Conjugué : $\bar{z}$ est le symétrique de z /à l'axe des abscisses

Coordonnées polaires



$\frac{a}{r} = \cos\theta \qquad \frac{b}{r} = \sin\theta \qquad r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\rightarrow z = a+ib = r\cos\theta + i r\sin\theta$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

Formule d'Euler $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

↳ Pourquoi ?? Comment ?

Notons $f : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{it} \in \mathbb{C}$

la fonction tq $\begin{cases} f'(t) = if(t) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ → $\begin{cases} f' = af \\ f(0) = 1 \end{cases}$ déf de $\exp(at)$

Montrons que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$.

→ f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

$\underbrace{f(t)}_{\in\mathbb{C}} = a(t) + ib(t) \quad \rightsquigarrow \quad f'(t) = a'(t) + ib'(t)$

Mais on sait que $f'(t) = if(t)$: $f'(t)$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de $f(t)$

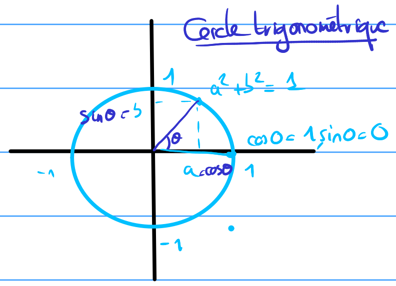
Donc $f(t)$ est orthogonal à $f'(t)$: le produit scalaire des vecteurs $(a(t), b(t))$ de $\mathbb{R}^2$ et $(a'(t), b'(t))$ est égal à 0

$\longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \underbrace{a(t)a'(t)}_{\text{dérivée de } \frac{1}{2}a(t)^2} + \underbrace{b(t)b'(t)}_{\text{dérivée de } \frac{1}{2}b(t)^2} = 0$, càd, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2}\left(a^2(t)+b^2(t)\right)' = 0$

$\rightarrow$ Donc la fonction $t \longmapsto a^2(t)+b^2(t)$ est constante :

$\forall t \in \mathbb{R} \quad a^2(t)+b^2(t) = a^2(0)+b^2(0)$

Or $f(0) = 1 = a(0) + ib(0) \longrightarrow a(0) = 1$, $b(0) = 0$



Donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $a^2(t)+b^2(t) = 1$

Donc $\exists\, \alpha(t)$ tq $a(t) = \cos(\alpha(t))$
$b(t) = \sin(\alpha(t))$

$f(0) = \cos(\alpha(0)) + i\sin(\alpha(0)) = 1$
$\rightarrow \alpha(0) = 0$

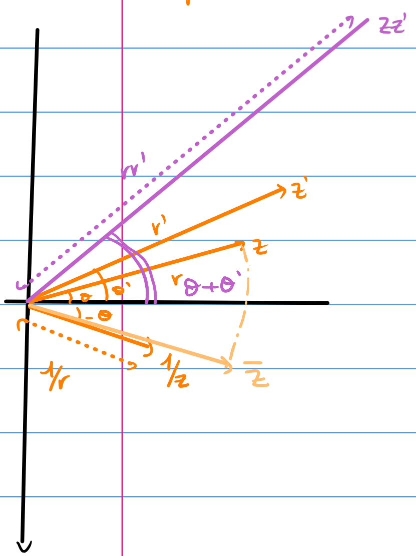
$\rightsquigarrow f(t) = \cos(\alpha(t)) + i\sin(\alpha(t))$ Donc $f'(t) = -\alpha'(t)\sin(\alpha(t)) + i\alpha'(t)\cos(\alpha(t))$

or on sait aussi que $f'(t) = if(t) = i\cos(\alpha(t)) - \sin(\alpha(t))$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left.\begin{array}{l}\alpha'(t) = 1 \\ \text{et } \alpha(0) = 0\end{array}\right\}$ Donc $\alpha(t) = t$ et Donc $f(t) = e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$

Et Donc, $\forall z \in \mathbb{C}$, $z = \underbrace{a+ib}_{\text{forme algébrique}} = \underbrace{r\cos\theta + ir\sin\theta}_{\text{forme "trigonométrique"}} = \underbrace{re^{i\theta}}_{\text{forme exponentielle}}$

Opérations en forme exponentielle $\quad z = re^{i\theta} \quad z' = r'e^{i\theta'}$



- Addition : $z+z' = re^{i\theta} + r'e^{i\theta'}$ ... pas de simplification
- Multiplication : $zz' = (re^{i\theta})(r'e^{i\theta'}) = rr'\, e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'\, e^{i(\theta+\theta')}$
- Inverse : si $r \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- Division : si $r' \neq 0$ $\frac{z}{z'} = \frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- Conjugué $z = r\cos\theta + ir\sin\theta \rightsquigarrow \bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$
$= r(\cos\theta + i\sin(-\theta))$
$= r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$\longrightarrow \bar{z} = re^{-i\theta}$