8 MATRICES ÉLÉMENTAIRES :

a) Définitions : on appelle ainsi les 3 types de matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ suivants :

α) Matrices P_{ij}, $i < j$:

$\boxed{\text{Elle est obtenue à partir de } I_n \text{ en échangeant ligne } i \text{ et ligne } j}$

$$P_{ij} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & & & 0 \\ 0 & & 0 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\; \uparrow i \quad \uparrow j \end{array}$$

β) Matrices $P_i(\alpha)$, $\alpha \neq 0$

$\boxed{\text{Elle est obtenue à partir de } I_n \text{ en multipliant } L_i \text{ par } \alpha}$

$$P_i(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{array}$$

γ) Matrices $P_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Elle est obtenue à partir de } I_n \text{ en ajoutant } \alpha L_j \text{ à } L_i}$

$$P_{ij}(\alpha) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & \cdots & & \\ 0 & 0 & \alpha & \ddots & 1 & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j \\ \leftarrow i \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\; \uparrow j \quad \uparrow i \end{array}$$

b) Propriétés : on a

$P_{ij}^2 = I_n$, $P_i(\alpha) \cdot P_i(\frac{1}{\alpha}) = I_n$ et $P_{ij}(\alpha) \cdot P_{ij}(-\alpha) = I_n$

Donc toutes les matrices élémentaires sont inversibles et plus précisément :

$$\boxed{P_{ij}^{-1} = P_{ij}} \quad \boxed{P_i(\alpha)^{-1} = P_i(\tfrac{1}{\alpha})} \quad \boxed{P_{ij}(\alpha)^{-1} = P_{ij}(-\alpha)}$$

9 MATRICES ÉLÉMENTAIRES ET OPÉR. ÉLÉMENTAIRES

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ qu'on va noter ici :

$$A = \begin{bmatrix} \text{ligne } 1 \\ \vdots \\ \text{ligne } n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}. \text{ Alors :}$$

$L_i \longleftrightarrow L_j$	$\Longleftrightarrow$	$A \leftarrow P_{ij} \cdot A$
$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$\Longleftrightarrow$	$A \leftarrow P_i(\alpha) \cdot A$
$L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$	$\Longleftrightarrow$	$A \leftarrow P_{ij}(\alpha) \cdot A$

(avec P_{ij}, $P_i(\alpha)$ et $P_{ij}(\alpha)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

10 ÉQUIVALENCE-LIGNE :

Soit A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Définition : A et B sont "ÉQUIVALENTES-LIGNES" ($A \overset{\ell}{\sim} B$) ssi B peut être obtenue à partir de A par une succession d'opé. élémentaires de lignes, c'est-à-dire s'il existe k matrices élémentaires $E_1, E_2, \ldots E_k$ telles que

$$\boxed{B = \underbrace{E_k \times E_{k-1} \times \cdots \times E_2 \times E_1}_{P} \times A}$$

Si j'applique la MÊME succession d'op. élém. à la matrice identité I_n, j'obtiendrai évidemment $E_k \times \cdots \times E_1 = P$ tel que $B = PA$

de manière symbolique :

$$\boxed{[A \,|\, I_n] \overset{\ell}{\sim} [B \,|\, P] \Longrightarrow B = PA}$$

11 APPLICATION À L'INVERSION DES MATRICES :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\boxed{[A \,|\, I_n] \overset{\ell}{\sim} [I_n \,|\, P] \Longrightarrow \begin{cases} A \text{ inversible} \\ \text{et} \\ A^{-1} = P \end{cases}}$$

Cette technique s'appelle "calcul de l'inverse de A, s'il existe, par la méthode du Pivot de Gauss"

12 FORME CANONIQUE-LIGNE :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Il existe une UNIQUE matrice R qui vérifie les 4 propriétés suivantes :

12 suite

a) $R \overset{\ell}{\sim} A$

b) R est échelonnée, c.à.d que sous une ligne nulle, il n'y a que des zéros, et le nombre des zéros au début d'une ligne non nulle est strictement supérieur à celui de la ligne précédente

c) le premier terme non nul d'une ligne non nulle est égal à 1

d) ce 1 est le seul terme non nul dans sa colonne

on appelle R la forme canonique ligne (f.c.l. en abrégé) de A.

13 RANG D'UNE MATRICE :

1) Définition : pour toute matrice A, on nomme RANG de A et on note $rg(A)$ le nombre de lignes non nulles de sa forme canonique ligne

2) Remarque : c'est d'ailleurs aussi le nombre de lignes non nulles de toute matrice ÉCHELONNÉE équivalente-ligne à A.

3) Propriétés :

Pour toutes les matrices A et B, on a :

a) $A \overset{\ell}{\sim} B \Longrightarrow rg(A) = rg(B)$

b) Si A est de format $m \times n$, alors $rg(A) \leq \min(m, n)$

c) Si $A.B$ est défini, $rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$

14 RETOUR SUR LES MATRICES INVERSIBLES :

Les 5 propositions suivantes sont équivalentes, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

a) A est inversible
b) $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
c) $rg(A) = n$
d) la forme canonique de A est I_n
e) A est un produit de matrices élémentaires.

$\boxed{\text{MATRICES (2)}}$