# MATRICES (1)

**1** a) Une matrice A à coeff. réels de format $(m,n)$ (ou encore une $m\times n$ matrice) est un TABLEAU rectangulaire contenant $m\times n$ réels disposés sur $m$ LIGNES et $n$ COLONNES :

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

b) Pour $1\le k\le m$ et $1\le \ell\le n$, $a_{k\ell}$ est à l'intersection de la ligne $k$ et de la col. $\ell$

$\boxed{\text{indice de ligne} \rightarrow a_{k\ell} \leftarrow \text{indice de colonne}}$

c) Avec les notations du a) et b) : A CARREE $\Leftrightarrow m=n$ et dans ce cas $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ est la DIAGONALE

d) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ = ensemble des matrices de format $(m,n)$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ = ensemble des matrices carrées d'ord. $n$

e) Pour $n\geq 1$ $I_n$ est la matrice carrée $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots 0\\ \vdots \\ 0 & \cdots & & 1\end{bmatrix}$
On l'appelle matrice IDENTITE d'ordre $n$

f) si besoin, on notera $O_{m,n}$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls (et $O_n$ l'analogue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

g) Si $A = [a_{ij}]$, on notera $-A = [-a_{ij}]$

**2** EGALITE : Attention !
Deux matrices sont EGALES ssi elles ont le MEME format, et si élts correspondants sont EGAUX.

**3** ADDITION : Attention !

a) Soit $A=[a_{ij}]$ et $B=[b_{ij}]$ deux matrices de MEME format $(m,n)$. La matrice SOMME de A et de B, notée $A+B$ est la matrice de format $(m,n)$ obtenue en ajoutant les élts correspondants :

$$[a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]$$

b) On a toutes les propriétés usuelles : pour toutes les matrices A, B, C de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

α) $A+B = B+A$ (commutativité)
β) $A+(B+C) = (A+B)+C$ (associativité)
γ) $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$ ($O_{m,n}$ neutre)
δ) $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$
ε) notation : $A - B = A + (-B)$

**4** MULTIPLICATION "SCALAIRE" :

a) pour $A = [a_{ij}]$ dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, le PRODUIT de A par λ, noté $\lambda A$ est la matrice de même format $(m,n)$ obtenue en multipliant chaque élément par λ :

$$\lambda A = \lambda[a_{ij}] = [\lambda a_{ij}]$$

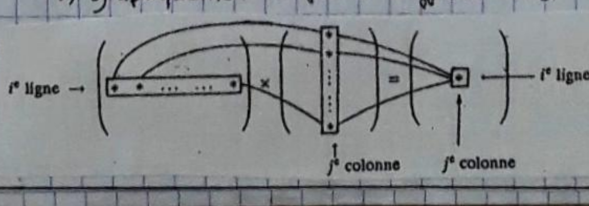
b) On a aussi toutes les propriétés usuelles pour toutes les matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et tous les réels λ et μ

α) $1\times A = A$
β) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
γ) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
δ) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

**5** PRODUIT MATRICE-MATRICE : (Moins facile)

a) le PRODUIT DANS CET ORDRE d'une matrice A par une matrice B n'est défini que s'il y a COMPATIBILITE DES FORMATS, c'est-à-dire si A est d'ordre $(m,n)$ et B d'ordre $(n,p)$
le produit AB sera d'ordre $(m,p)$ : symboliquement $\boxed{mat(m,n)\times mat(n,p) = mat(m,p)}$

b) graphiquement le produit s'effectue ainsi :




c) Symboliquement, c'est moins simple...
Si $A = [A_{k\ell}]_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le \ell\le n}}$, $B = [b_{rs}]_{\substack{1\le r\le n\\ 1\le s\le p}}$

alors $AB = [q_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le p}}$ avec $\boxed{q_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}$

c) Attention au $\boxed{\text{DEFAUT DE COMMUTATIVITE !}}$

α) si A est de format $(m,n)$ et B de format $(n,p)$ avec $p\neq m$, AB est défini, mais BA n'est PAS DEFINI.

β) si A est de format $(m,n)$ et B de format $(n,m)$ avec $m\neq n$, AB est carré d'ordre $m$ et BA carré d'ordre $n$ : donc $AB\neq BA$ !

γ) $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

d) Propriétés du produit matrice-matrice :
Soit A et A' de format $(m,n)$
B et B' de format $(n,p)$
C de format $(p,q)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$

Alors

α) $A(BC) = (AB)C$
β) $AI_n = A$ et $I_m A = A$
γ) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
δ) $A(B+B') = AB + AB'$
et $(B+B')C = BC + B'C$

Attention : vous noterez le respect de l'ordre des facteurs des produits.

$$(A+A')(B+B') = AB + AB' + A'B + A'B'$$

**6** PUISSANCES. POLYNÔMES MATRICIELS dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre $n$

a) Bien sûr, pour $k\geq 1$ $A^k = A\times A\times\dots\times A$ ← k facteurs
Attention : $A^0 = I_n$

b) on aura : $\forall k\geq 0\ \forall \ell\geq 0$ $A^k.A^\ell = A^{k+\ell} = A^\ell.A^k$
et $(A^k)^\ell = A^{k\ell}$. Attention cependant si $AB\neq BA$ $(AB)^n = (AB)(AB)\dots(AB) \neq A^nB^n$

c) α) si $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$, alors
$P(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n$

β) Si P et Q sont 2 polynômes, on a toujours $P(A)Q(A) = Q(A)P(A)$, mais $P(A)Q(B)$ et $Q(B)P(A)$ sont en général distincts.
Cependant si $AB = BA$, alors $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

d) Attention : on ne peut utiliser la formule du binôme que si A et B COMMUTENT

Alors : $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{p-k}B^k$

**7** MATRICES INVERSIBLES :
Dans ce cadre **7**, toutes les matrices considérées sont carrées d'ordre $n$

a) La matrice A est inversible ssi il existe une autre matrice A' telle que $AA' = A'A = I_n$.
Si c'est le cas, A' est unique.
Attention : il existe beaucoup de matrices non inver.

b) α) si A est inversible $(A^{-1})^{-1} = A$
β) si A et B sont inversibles, AB aussi et attention ! $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

c) Trois propriétés importantes :

(subtil →) α) $AB = I_n \Leftrightarrow BA = I_n \Leftrightarrow$ (A inver. d'inverse B)

β) A inversible $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\text{le système } A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\\ \text{n'a que la solution } \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}$

γ) $\boxed{\text{A inversible d'inverse B}} \Leftrightarrow$

Pour tout $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ le système d'inconnue $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ a une solution unique qui est $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$