Logique formelle

Propositions et connecteurs : Une *proposition* est un énoncé mathématique qui peut être soit vrai, soit faux. Si P, Q sont deux propositions, on peut les utiliser pour former de nouvelles propositions à l'aide de *connecteurs logiques :*

- $\neg P$ est vraie ssi P est fausse.
- $(P \vee Q)$ est vraie ssi au moins l'une des deux propositions P et Q est vraie.
  $\rightsquigarrow \neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q)$.
- $(P \wedge Q)$ est vraie ssi les propositions P et Q sont toutes deux vraies.
  $\rightsquigarrow \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$.
- $(P \Rightarrow Q)$ est équivalente à $(\neg P) \vee Q$.
  $\rightsquigarrow \neg(P \Rightarrow Q) \iff (P \vee (\neg Q))$.
  ⚠ En particulier, si P est fausse, $P \Rightarrow Q$ est automatiquement vraie.

Méthodes :

- Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on suppose que P est vraie, et on en déduit Q.
- Pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est fausse, on montre, d'une part que P est vraie, et d'autre part que Q est fausse.
- Pour montrer que (P **et** Q) est vraie, on montre séparément que P et Q sont vraies.
- Pour montrer que (P **ou** Q) est vraie, on peut utiliser $(P \vee Q) \iff (\neg\, P \Rightarrow Q)$: on suppose que P est fausse et on en déduit Q.
  $\rightsquigarrow$ On peut aussi montrer $(Q \vee P)$ via $(\neg\, Q \Rightarrow P)$.

Tables de vérités : Pour étudier une proposition complexe, formée à partir de propositions élémentaires $P_1, \dots, P_k$ et des connecteurs logiques $\vee, \wedge, \Rightarrow$, on peut construire sa *table de vérité* : on indique dans les n premières colonnes les valeurs de vérité possibles pour chacun des P_i ; 1 pour "vrai", 0 pour "faux".
$\rightsquigarrow$ Il y a donc 2^n lignes.

Dans les colonnes suivantes, on construit les valeurs de vérités des composantes de la proposition P, en ajoutant un quantificateur à chaque fois.
Exemple : $P : (\neg P_1 \Rightarrow (P_2 \vee P_1))$

P_1	P_2	$\neg P_1$	$P_2 \vee P_1$	$\neg P_1 \Rightarrow (P_2 \vee P_1)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

Une *tautologie* est une proposition complexe qui est vraie, quelle que soit la valeur de vérité des composantes $P_1, \dots, P_k$.
$\rightsquigarrow$ Les tautologies donnent des "règles de raisonnement logique" :

- *Transitivité d'l'implication :* $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.
- *Contraposée :* $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- *Disjonction des cas :* $[(P \vee Q) \wedge (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow R$
- *Double implication :* $(P \Leftrightarrow Q) \iff [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$
- *Raisonnement par l'absurde :* $[(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$.

Prédicats et quantificateurs : Un *prédicat* sur un ensemble A est une expression qui à chaque $x \in A$ associe une proposition $P(x)$.

- "$\forall x \in A,\ P(x)$" est une proposition qui est vraie ssi quel que soit $x \in A$, $P(x)$ est vraie.
- "$\exists x \in A,\ P(x)$" est une proposition qui est vraie si on peut trouver au moins un $x_0 \in A$ t.q. $P(x_0)$ soit vraie.
- $\neg\, (\forall x \in A,\ P(x)) \iff \exists x \in A, \neg\, (P(x))$.
- $\neg\, (\exists x \in A,\ P(x)) \iff \forall x \in A, \neg\, (P(x))$.

Méthodes - Rédaction : Pour montrer...

- *que "$\forall x \in A,\ P(x)$" est vraie :* On écrit "Soit $x \in A$, montrons que $P(x)$". On est alors ramené à montrer la proposition $P(x)$.
- *que "$\exists x \in A,\ P(x)$" est vraie :* On cherche un $x_0 \in A$ spécifique qui marche, puis on rédige :
  "Posons $x = x_0$. Vérifions que $P(x_0)$".
- *que "$\forall x \in A,\ P(x)$ est fausse" :* On cherche un *contre-exemple :* un $x_0 \in A$ spécifique tel que $P(x_0)$ soit fausse, et on rédige :
  "Posons $x = x_0$. Vérifions que $\neg\, (P(x_0))$"
- *que " $\exists x \in A,\ P(x)$" est fausse :* Il s'agit de montrer que $\forall x \in A, \neg\, (P(x))$.
- *qu'il y a un unique x tel que* $P(x)$: On commence par montrer qu'il en existe un.
  Puis on montre que c'est le seul : "Soient $x, y \in A$. Supposons $P(x)$ et $P(y)$. Montrons que $x = y$."

Raisonnements classiques :

- *Par contraposée :* Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$, on montre la proposition équivalente $\neg\, Q \Rightarrow \neg\, P$.
- *Par l'absurde :* Pour montrer que P est vraie, on suppose que P est fausse et on en déduit une contradiction.
  $\rightsquigarrow$ Dans le cas où P est une implication $Q_1 \Rightarrow Q_2$, on suppose donc que Q_1 est vraie et Q_2 est fausse, et on cherche une contradiction entre les deux.
- *Par double implication :* Pour montrer une équivalence $P \iff Q$, on montre successivement $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.
- *Par récurrence :* Pour montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$, où $P(n)$ est un prédicat sur $\mathbb{N}$:
  - *Initialisation :* On montre que $P(0)$ est vraie.
  - *Hérédité :* On montre, pour $n \in \mathbb{N}$, que l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie.
    $\rightsquigarrow$ On écrit : "Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$."
- *Par disjonction des cas :* Pour montrer "$\forall x \in E,\ P(x)''$, on peut écrire $E = E_1 \cup ... \cup E_k$, et montrer séparément "$\forall x \in E_1, P(x)$",...,"$\forall x \in E_k,\ P(x)$".
- *Par analyse-synthèse :* Pour trouver les $x \in A$ t.q. $P(x)$:
  - *Analyse :* "Soit $x \in A$. Supposons que $P(x)$", puis on trouve des conditions qui permettent de déterminer x.
  - *Synthèse :* "Posons $x = ...$ (ce qu'on a trouvé à l'étape Analyse). Vérifions que $x \in A$ et $P(x)$."