Permutation limites/intégrales - Intégrales à paramètres

Convergence simple et uniforme : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que (f_n) *converge simplement* vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I si, pour tout $x_0 \in I$, la suite réelle $(f_n(x_0))_n$ converge vers $f(x_0)$. En quantificateurs :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I, on prend donc un élément quelconque $x \in I$ et on montre que $f_n(x) \to f(x)$, tout simplement.

On dit que (f_n) *converge uniformément* vers la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ sur I si $s_n = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$. Autrement dit, sur I tout entier, f_n reste à une distance inférieure à s_n de f, et s_n devient de plus en plus petit. En quantificateurs :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x_0 \in I, |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.}$$

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que $(f_n)_n)$ converge uniformément vers f sur I, on peut :

- Etudier les variations de la fonction $f_n - f$ sur I pour calculer $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.
- Majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une suite u_n *qui ne dépend pas de* x, et t.q $u_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

La convergence uniforme est “plus forte” :

$$(f_n)_n \text{ cvu vers } f \text{ sur } I \Rightarrow (f_n)_n \text{ cvs vers } f \text{ sur } I$$

Permutation limite/intégrale sur un segment : Soit $I = [a, b]$ fermé borné et $(f_n)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$. Si $(f_n)_n$ converge *uniformément* vers f que $[a, b]$, alors f est intégrable et

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt}$$

⚠ Ce n'est vrai que pour la convergence uniforme. Ainsi, la suite de fonctions $f_n = nxe^{-n\frac{x^2}{2}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$ mais $\int_0^1 f_n(t)dt = 1 - e^{-\frac{n}{2}} \to 1$.

⚠ Ce n'est vrai que sur un intervalle borné. Ainsi, sur $\mathbb{R}^+$, $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$ converge uniformément vers 0, mais $\int_{\mathbb{R}^+} f_n(t)dt = 1 \nrightarrow 0 = \int 0dt$.

Pour les intégrales généralisées : le petit théorème de convergence dominée.

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions loc. int. sur I. On suppose que

- $(f_n)_n$ cv *simplement* vers f sur I ;
- Il existe une fonction positive $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que $|f_n(t)| \leq g(t)$ pour tout n et pour tout t ;
- $\int_I g(t)dt$ converge.

Alors les fonctions f_n et f sont aussi intégrables sur I et on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$$

Intégration d'une série de fonctions sur $[a, b]$ Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions sur $I = [a, b]$, notons (S_n) la série de terme général f_n, définie sur $[a, b]$ par $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_n(x)$.

Supposons que

- Pour tout n, f_n est intégrable sur $[a, b]$
- $(S_n)_n$ converge uniformément vers $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

Alors la série $\sum_n \int_a^b f_n(t)dt$ converge et

$$\sum_n \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b S(t)dt = \int_a^b \left(\sum_n f_n(t)\right) dt$$

C'est en particulier le cas si $(S_n)_n$ converge normalement :

Rappel : Convergence normale : Si, pour tout $x \in I$, on a

- $|f_n(x)| \leq u_n$, où $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *ne dépend pas de* x ;
- la série (réelle) de terme général u_n converge,

Alors on dit que la série $(S_n)_n$ de terme général f_n converge *normalement.*

Remarque : cela revient à dire que la série de terme général $s_n = \sup_I |f_n(x)|$ converge.

Si la série de terme général f_n *converge normalement, alors elle converge uniformément..*

Intégrale généralisée d'une série de fonctions : Soit I intervalle quelconque. Supposons que :

- $(S_n)_n$ converge simplement vers $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$;
- Les f_n et S sont continues par morceaux sur I (donc loc.int.)
- La série (réelle) de t.g. $\int_I |f_n(t)|dt$ est convergente.

Alors l'intégrale $\int_I S(t)dt$ est convergente, la série $\sum_n \int_I f_n(t)dt$ est convergente, et

$$\sum_n \int_I f_n(t)dt = \int_I S(t)dt = \int_I \left(\sum_n f_n(t)\right) dt$$

Remarque : On peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(S_n)_n$.

Intégrales à paramètres. Soient I, J deux intervalles et $f : I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction (à deux variables).

Soit $x_0 \in J$. Si la fonction $t \in I \mapsto f(t, x_0)$ est intégrable[a] sur I, on peut définir $\int_I f(t, x_0)dt$.

Si c'est le cas pour tout $x \in J$, on peut définir $\int_I f(t, x)dt$: cette intégrale dépend du *paramètre* $x \in J$. On définit ainsi une fonction $F : x \in J \mapsto \int_I f(t, x)dt$: cette fonction est appelée *intégrale à paramètre.*

a. Si $I = [a, b]$, c'est une intégrale de Riemann ; sinon, c'est une intégrale généralisée.

Cas où $I=[a,b]$

- *Continuité :* Si la fonction à deux variables $f:[a,b]\times J\to\mathbb{R}$ est continue, alors la fonction $F:x\in J\mapsto\int_a^b f(t,x)dt$ est continue sur J.
- *Dérivation* [a] *:* Si la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ est continue que $[a,b]\times J$, alors la fonction F est dérivable sur J et

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

a. On suppose que J est un intervalle ouvert

Cas d'une intégrale généralisée. On prend maintenant pour I un intervalle quelconque. Pour obtenir la continuité et la dérivabilité de F, on va devoir ajouter des hypothèses similaires à celles du théorème de convergence dominée.

Continuité : Supposons que :

1. $f:I\times J\to\mathbb{R}$ est continue sur $I\times J$;
2. Il existe $g:I\to\mathbb{R}^+$ telle que $|f(t,x)|\le g(t)$ pour tous $(t,x)\in I\times J$
3. L'intégrale $\int_I g(t)dt$ est convergente.

Alors, pour tout $x\in J$, $\int_I f(t,x)dt$ est convergente et la fonction $F:x\in J\mapsto\int_I f(t,x)dt$ est continue sur J.

Dérivabilité : Supposons que $f:I\times J\to\mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I\times J$, t.q. pour tout $x\in J$, $\int_I f(t,x)dt$ est convergente. On suppose de plus que :

1. La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ existe et est continue sur $I\times J$;
2. Il existe $g:I\to\mathbb{R}^+$ telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\le g(t)$ pour tous $(t,x)\in I\times J$
3. L'intégrale $\int_I g(t)dt$ est convergente.

Alors pour tout $x\in J$, l'intégrale $\int_I\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$ est convergente ; la fonction $F:x\in J\mapsto\int_I f(t,x)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et

$$F'(x)=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Intégrale double sur un rectangle : Soit $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, la fonction $\varphi: y\in[c,d]\mapsto\int_a^b f(x,y)dx$ est continue, donc intégrable sur $[c,d]$: on peut donc définir

$$\int_c^d\varphi(y)dy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

D'un autre côté, la fonction $\psi: x\in[a,b]\mapsto\int_c^d f(x,y)dy$ est également continue, donc intégrable, ce qui donne

$$\int_a^b\psi(y)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

On a :

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$$

et on peut donc noter ce nombre $\iint_R f(x,y)dxdy$, où $R=[a,b]\times[c,d]$: c'est l'intégrale de la fonction à deux variables f sur le rectangle R.

Si $f(x,y)=u(x)v(y)$, avec $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ et $v:[c,d]\to\mathbb{R}$, on a

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\left(\int_a^b u(x)dx\right)\left(\int_c^d v(y)dy\right)$$

Intégrales doubles sur un domaine D. Dans $\mathbb{R}^2$, on pourrait souhaiter intégrer une fonction sur un non-rectangle : un disque, par exemple, ou un triangle.

Supposons que $D\subset\mathbb{R}^2$ soit fermé et borné, avec un bord $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et $f:D\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

En subdivisant D en petits "sous-rectangles", et en approchant la fonction f par des fonctions constantes sur les rectangles, on peut définir une intégrale double $\iint_D f(x,y)dxdy$.

Cette intégrale vérifie, pour toutes fonctions intégrables $f,g:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$*\ \iint_D\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)dxdy=\alpha\iint_D f(x,y)dxdy+\beta\iint_D g(x,y)dxdy$$

$*$ $\iint_D f(x,y)dxdy$ représente le volume algébrique sous le graphe de f.

$$*\ \iint_D 1dxdy=\text{Aire}(D).$$

$$*\ \text{Si } f\le g,\ \iint_D f(x,y)dxdy\le\iint_D g(x,y)dxdy$$

$$*\ \left|\iint_D f(x,y)dxdy\right|\le\iint_D|f(x,y)|dxdy$$