CALCUL PRATIQUE DE A^{-1}, SI A INVERSIBLE

On peut envisager, au moins en théorie, quatre possibilités :

1) La méthode "du système" :

Elle repose sur l'utilisation de la propriété :

$$\boxed{A \text{ inversible et d'inverse } B}$$

$$\Updownarrow$$

Pour tout $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ le système d'inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{a une unique solution qui est} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

a) On écrit le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et on le résoud ;

b) Si, pour tout $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, ① possède une solution unique $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, A est inversible et $A^{-1} = B$

c) sinon, A n'est pas inversible.

2) La méthode dite "du Pivot de Gauss" :

C'est une traduction complètement naturelle de la méthode du système ; elle utilise des opérations sur les lignes de la "double" matrice $[A | I_n]$, cette matrice servant de "compilateur-mémoire".

3) L'utilisation d'un polynôme "dont A est racine"

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si $P(X) = X^m + c_{m-1}X^{m-1} + \dots + c_1 X + c_0$, si l'on a $P(A) = 0_n$ et $\boxed{\text{si } c_0 \neq 0}$, alors A est inversible et $A^{-1} = \left(-\frac{1}{c_0}\right)\left[A^{m-1} + c_{m-1}A^{m-2} + \dots + c_2 A + c_1 I_n\right]$

4) L'utilisation de la merveilleuse formule suivante :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t(\mathrm{Comat}(A))} \quad (\text{si } \det(A) \neq 0)$$

Mais pour pouvoir utiliser cette formule "explicite", il faut

* savoir ce qu'est $\det(A)$ et ce qu'est $\mathrm{Comat}(A)$;
* comprendre le sens de la lettre "t"

Cette formule sera étudiée plus tard, dans le cours d'Algèbre Linéaire, et n'est donc pas opératoire maintenant. De plus, si elle a un grand intérêt théorique, elle est d'un point de vue calculatoire totalement inutilisable dès que $n \geqslant 4$.