Intégration

Intégrale de Riemann : On appelle *subdivision* de $[a,b]$ toute suite finie $\sigma = (x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$.
⚠ Notez que les premier et dernier points de la subdivision doivent être les bornes de l'intervalle, pour le recouvrir en entier.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $\sigma = (x_0 < x_1 < \dots < x_n)$ une subdivision de $[a,b]$. On note

$$I^-(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t)$$
$$I^+(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{t \in [x_i, x_{i+1}]} f(t),$$

l'idée étant que l'aire sous la courbe de f devrait être entre $I^-(f,\sigma)$ et $I^+(f,\sigma)$. En prenant des subdivisions de plus en plus fines, on espère réduire l'écart entre les deux et, à la limite, obtenir l'intégrale de f. On définit pour cela

$$I^-(f) = \sup\{I^-(f,\sigma),\ \text{pour } \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$$
$$I^+(f) = \inf\{I^+(f,\sigma),\ \text{pour } \sigma \text{ subdivision de } [a,b]\}$$

On dit alors que f est intégrable sur $[a,b]$ si $\boxed{I^-(f) = I^+(f)}$, ou, de manière équivalente, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \sigma \text{ subdivision tq } I^+(f,\sigma) - I^-(f,\sigma) < \varepsilon.$$

On note alors $\int_a^b f(t)dt = I^-(f) = I^+(f)$. On note $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$.

Critères d'intégrabilité : Les familles de fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$ suivantes sont intégrables :

- Les fonctions *en escaliers* : une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escaliers s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots x_n)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, f est constante sur $[x_i, x_{i+1}]$.
- Les fonctions *monotones*, càd croissantes sur $[a,b]$ ou décroissantes sur $[a,b]$.
- Les fonctions *continues* sur $[a,b]$.

  ⚠ Attention, il ne suffit pas d'être continue sur $]a,b[$: par exemple, la fonction $\frac{1}{x}$ est continue, mais pas intégrable, sur $]0,1[$.

Contre-exemple : La fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon, n'est pas intégrable sur $[0,1]$

Méthodes de calcul : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrable. On veut calculer $\int_a^b f(t)dt$.

- *Méthode "directe" :* Si f est continue, et si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
- *Décomposition en éléments simples :* Si f est de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)}$; où P et Q sont des polynômes, on peut écrire f comme somme d'éléments "simples", que l'on sait primitiver : $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{(x-a)^k}$, $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$. Voir la fiche à ce sujet.
- *Intégration par parties :* Si $f = uv$, avec u facile à primitiver et v facile à dériver, on note U une primitive de u, et on a :

$$\int_a^b u(t)v(t)dt = [U(x)v(x)]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)dt$$

  Astuce : Pour choisir u et v, on peut utiliser "LIPTE" : Logarithme/Inverse (d'une fonction trigo, ex : arctan)/Polynôme/Trigonométrique/Exponentielle. On préfère généralement dériver ce qui est à gauche dans cette liste et primitiver ce qui est à droite.

- *Changement de variable :* Si on arrive à écrire $f(t) = u'(t)g(u(t))$, alors on peut simplifier son intégrale :

$$\int_a^b u'(t)g(u(t))dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g(x)dx$$

Intégrale généralisée en $+\infty$: Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle borné $[c,d] \subset [a, +\infty[$ (on dit que f est *localement intégrable*).

L'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(t)dt$ *converge* si $\int_a^M f(t)dt$ a une limite finie quand $M \to \infty$, et *diverge* sinon.
Méthodes/critères : Pour étudier la convergence de $\int_a^\infty f(t)dt$:

- On peut calculer $\int_a^M f(t)dt$ par une des méthodes ci-dessus, et étudier la limite quand $M \to \infty$.
- *Critère de comparaison :* Si $f(t) \leq g(t)$ sur $[a, +\infty[$ et si f et g sont *positives*, alors
  - $\int_a^\infty g(t)dt$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(t)dt$ converge ;
  - $\int_a^\infty f(t)dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(t)dt$ diverge.
- *Critère d'équivalence :* Si $f \underset{\infty}{\sim} g$ et si f et g sont *positives*, alors $\int_a^\infty g(t)dt$ converge ssi $\int_a^\infty f(t)dt$ converge.
- *Absolue convergence :* On peut se ramener à des fonctions positives en utilisant le fait que si $\int_a^\infty |f(t)|dt$ converge alors $\int_a^\infty f(t)dt$ converge.
- *Cas particulier :* $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha > 1$.

Intégrale généralisée en a : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur tout intervalle borné $[c,d] \subset]a,b[$ (on dit que f est *localement intégrable*).

L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ *converge* si $\int_c^b f(t)dt$ a une limite finie quand $c \to a$, et *diverge* sinon.
Méthodes/critères

- On peut calculer $\int_c^b f(t)dt$ par une des méthodes ci-dessus, et étudier la limite quand $c \to a$.
- Les critères de comparaison et d'équivalence s'appliquent exactement comme ci-dessus. Idem pour la convergence absolue.
- *Cas particulier :* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge ssi $\alpha < 1$.