CALCUL INTEGRAL (3)

21 **Conséquences** de **20**

- Si f est une fonction continue <u>paire</u> sur $[-a, a]$

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\cdot\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

- Si f est une fonction continue <u>impaire</u> sur $[-a, a]$,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

- Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, admettant une <u>période</u> $T \neq 0$,

$$\forall a \in \mathbb{R},\quad \int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{0}^{T} f(t)\,dt.$$

22 **Changement de variable** général :

Soit φ une fonction numérique de classe C^1 sur $[a, b]$ et f une fonction numérique continue sur le segment $\varphi([a, b])$. On a

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\,du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.}$$

Remarque. On peut retenir de façon « mécanique » ce résultat en posant

$$t = \varphi(u)$$
$$dt = \varphi'(u)\cdot du.$$

Les bornes d'intégration a et b pour la variable u se modifiant en $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ pour la variable $t = \varphi(u)$.

23 REMARQUE : La formule qui précède est conséquence immédiate du fait que, si F est une primitive de f,

$F\circ\varphi$ est une primitive de $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$

On retiendra donc aussi :

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C}$$

23 INTEGRATION PAR PARTIES (1)

(plus précisément ici « primitivation par parties »)

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I : on a alors

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

24 INTEGRATION PAR PARTIES (2)

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $[a, b]$. On a

$$\boxed{\int_{a}^{b} f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_{a}^{b} f(x)\cdot g'(x)\,dx}$$

25 **Intégration par parties itérée** (3)

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$, de classe C^n sur $[a, b]$; on a :

$$\int_{a}^{b} f^{(n)}(x)g(x)\,dx = \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f^{(n-k-1)}(x)\cdot g^{(k)}(x)\right]_a^b + (-1)^n \int_{a}^{b} f(x)g^{(n)}(x)\,dx.$$

25 FORMULE DE TAYLOR AVEC RESTE INTEGRAL

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et f une application de classe C^{n+1} sur I.

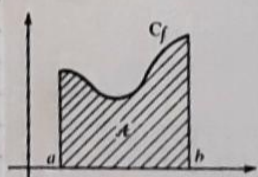
Pour $a \in I$ et $b \in I$, on a :

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f^{(2)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_{a}^{b} \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx}$$

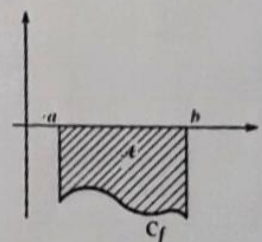
et

$$\boxed{\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|}$$

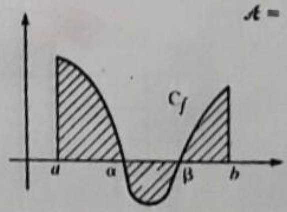
26 **Calculs d'aires**



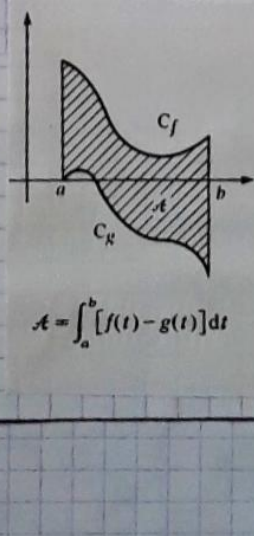
$$\mathcal{A} = \int_{a}^{b} f(t)\,dt$$



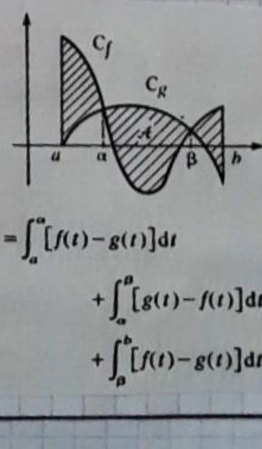
$$\mathcal{A} = -\int_{a}^{b} f(t)\,dt$$



$$\mathcal{A} = \int_{a}^{\alpha} f(t)\,dt - \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt + \int_{\beta}^{b} f(t)\,dt$$



$$\mathcal{A} = \int_{a}^{b} [f(t) - g(t)]\,dt$$



$$\mathcal{A} = \int_{a}^{\alpha} [f(t) - g(t)]\,dt + \int_{\alpha}^{\beta} [g(t) - f(t)]\,dt + \int_{\beta}^{b} [f(t) - g(t)]\,dt$$