CALCUL INTEGRAL (2)

11 **Linéarité**

Soit E l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$. E est un espace vectoriel sur le corps des réels. L'application

$$I : E \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \int_a^b f(t)\,dt$$

est une application linéaire, autrement dit quel que soit $(f, g) \in E^2$, quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

$$\int_a^b (\lambda \cdot f)(t)\,dt = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,dt.$$

12 **Positivité**

Si f est une fonction continue (ou continue par morceaux) sur $[a, b]$,

si $a<b$

$$f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

13 **Conséquences** de **12**

1) Si f et g sont deux fonctions continues (ou continues par morceaux) sur $[a, b]$, et si $a<b$

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

2) Pour toute fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$, si $a<b$

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Dans le cas où l'ordre des deux éléments a et b n'est pas connu, pour toute fonction continue ou continue par morceaux sur le segment d'extrémités a et b,

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|.$$

14

Si f est une fonction continue positive sur le segment $[a, b]$ $(a<b)$, <u>non constamment nulle</u>, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

Autre formulation :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } [a, b] \\ (\text{avec } a<b) \\ f \geq 0 \\ \int_a^b f(t)\,dt = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0.$$

15 **Inégalité de Schwartz** - Inégalité de Minkowski

Soit f et g deux fonctions numériques continues ou continues par morceaux sur $[a, b]$, on a

$$\boxed{\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b [g(t)]^2\,dt}.}$$

(Inégalité de Schwartz).

Corollaire (inégalité de Minkowsky) :
Pour tout couple (f, g) de fonctions continues ou continues par morceaux sur $[a, b]$,

$$\sqrt{\int_a^b [f(t)+g(t)]^2\,dt} \leq \sqrt{\int_a^b [f(t)]^2\,dt} + \sqrt{\int_a^b [g(t)]^2\,dt}.$$

16

Soit f une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$, avec $a<b$.

Posons : $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$

on a

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq M\cdot(b-a).$$

ou encore

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq M.$$

le nombre réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

s'appelle valeur moyenne de la fonction f sur le segment $[a, b]$.

17

Soit f une fonction numérique continue sur $[a, b]$.
Il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\cdot f(c)$$

ou encore, si $a<b$, tel que

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = f(c).$$

18 FORMULE DE LA MOYENNE :

Soit f et g deux fonctions numériques définies sur $[a, b]$. Si f et g sont continues ou continues par morceaux, si <u>g est positive</u> et si $(a<b)$

$$m = \inf_{[a,b]} f, \quad M = \sup_{[a,b]} f$$

on a

$$m\int_a^b g(t)\,dt \leq \int_a^b f(t)g(t)\,dt \leq M\int_a^b g(t)\,dt.$$

* Si la fonction f est <u>continue</u> sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\boxed{\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(c)\cdot\int_a^b g(t)\,dt.}$$

19 **Sommes de Riemann**

Si f est une fonction continue ou continue par morceaux sur $[a, b]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Remarques

1) On a le même résultat avec $\sum_{i=0}^{n}$, $\sum_{i=1}^{n}$, $\sum_{i=1}^{n-1}$

2) On retiendra surtout

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

20 **Changement de variable affine**

Soit $\varphi : u \mapsto \alpha u + \beta$ une fonction affine définie sur $[a, b]$, avec $\alpha \neq 0$.
Soit f une fonction numérique continue sur le segment $[\alpha a+\beta ; \alpha b+\beta]$; on a :

$$\boxed{\int_a^b f(\alpha u+\beta)\,du = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(t)\,dt.}$$