CALCUL INTEGRAL (1)

1 Primitives

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction numérique F définie et dérivable sur I et telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

2

1) Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet sur I une primitive.

2) Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit F une primitive de f sur I.

a) Si G est une autre primitive de f sur I, $F - G$ est une fonction constante sur I.

b) Réciproquement, si C est un réel quelconque, la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + C$ est une primitive de f sur I.

3

Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f sur I telle que

$$f(x_0) = \lambda.$$

4

ATTENTION : Pour $\boxed{3}$ et $\boxed{2}$ l'hypothèse selon laquelle f est définie sur un intervalle est essentielle; on remarquera par exemple que si F est une primitive de f sur l'union $I \cup J$ de deux intervalles disjoints, toute autre primitive G de f sur $I \cup J$ est définie par

$$G(x) = \begin{cases} F(x) + C_1, & x \in I \\ F(x) + C_2, & x \in J \end{cases}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles quelconques.

5 Intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$

Soit f une fonction numérique continue sur un segment $[a, b]$.
Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.
Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F de f, on l'appelle intégrale de f de a à b, on le note

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

La variable t est « muette », elle peut être remplacée par toute autre,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Le réel $F(b) - F(a)$ se note encore $[F(t)]_a^b$.

On a donc : $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)}$

6 Intégrale fonction de la borne d'en haut :

1) Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a.
La fonction φ définie par : $\forall x \in I \ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est LA primitive de f sur I s'annulant en a

$$\forall x \in I \ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \iff \begin{cases} \varphi(a) = 0 \text{ et} \\ \forall x \in I \ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

2) Plus généralement, si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I, alors $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est de classe C^{p+1} et $\varphi' = f$.
(c'est également vrai pour $p = \infty$)

7 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Une fonction numérique f définie sur un segment $[a, b]$ est dite continue par morceaux s'il existe une suite finie d'éléments de $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

telle que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue et admette un prolongement continu f_i sur $[x_i, x_{i+1}]$: cela revient à dire que f admet une limite à droite finie en x_i et une limite à gauche finie en x_{i+1}.

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et avec les notations précédentes, on appelle intégrale de f de a à b, le réel

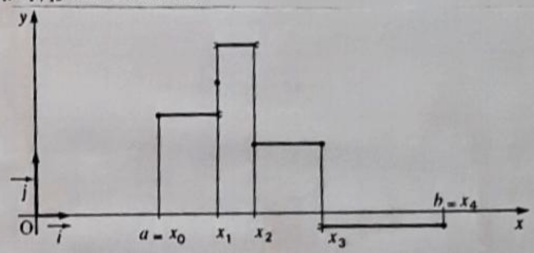
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)\,dt.$$

8 Cas particulier de fonction continue par morceaux : fonction en escalier

Une fonction numérique f définie sur $[a, b]$ est dite en escalier s'il existe une subdivision de $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b,$$

telle que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante.



Intégrale. Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$, définie relativement à la subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$$

par $\quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, \ \forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \ f(x) = C_i$

on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = (x_1 - x_0)\cdot C_0 + (x_2 - x_1)\cdot C_1 + \ldots + (x_n - x_{n-1})\cdot C_{n-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\cdot C_i.$$

9 Inversion des bornes :

4. $\int_a^b f(t)\,dt$, **avec** $a > b$

Si f est une fonction numérique continue ou continue par morceaux sur $[b, a]$,

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

10 Relation de Chasles

Si f est une fonction numérique continue ou continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Si a, b, c désignent trois éléments quelconques de I, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$