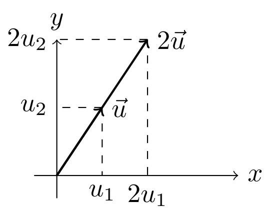
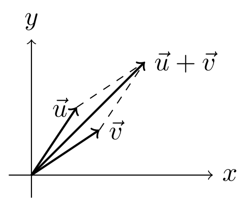
Géométrie vectorielle

Dans le plan

Vecteurs du plan : Les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ sont décrits par deux coordonnées : $\vec{u} = (u_1, u_2)$, et sont représentés par des flèches. On peut

- additionner deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$. En particulier, en notant $\vec{\imath} = (1, 0)$ et $\vec{\jmath} = (0, 1)$, on a $u = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$.
- multiplier un vecteur $\vec{u} = (u_1, u_2)$ par un réel λ : $\lambda\vec{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.



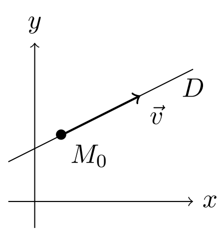


On définit, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

- leur *produit scalaire* $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- la *norme* de $\vec{u}$, autrement dit sa longueur, est donnée par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. En particulier, la distance entre deux points A et B du plan est donnée par $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- leur *déterminant* $\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$. Alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *colinéaires*, autrement dit ils ont la même direction.

Droites dans le plan : Soient $M_0 = (x_0, y_0)$ un point du plan et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur *non nul*. La droite de *vecteur directeur* $\vec{v}$ passant par M_0 correspond à l'ensemble

$$D = \{M \in \mathbb{R}^2, M = M_0 + t\vec{v},\ \text{pour un } t \in \mathbb{R}\}$$



Il existe deux types d'équations pour décrire la droite D :

1. l'équation *paramétrique* :

$$M = (x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

2. l'équation *cartésienne* : $M = (x, y) \in D$ si et seulement si $v_2x - v_1y = c$, où $c = \det(\overrightarrow{OM_0}, \vec{v})$. Inversement, un ensemble de la forme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, ax + by = c\}$ correspond à une droite de vecteur directeur $\vec{v} = (-b, a)$.

Remarque : Le point $M = (x, y)$ appartient à la droite D de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par M_0 si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sont colinéaires, autrement dit ssi

$$\det(\overrightarrow{M_0M}, \vec{v}) = (x - x_0)v_2 - (y - y_0)v_1 = 0;$$

c'est comme cela que l'on obtient l'équation cartésienne.

Configurations de droites : Deux droites D et D' de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont

- parallèles ou confondues si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, autrement dit ssi $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$;
- orthogonales si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, autrement dit ssi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Dans l'espace

Vecteurs de $\mathbb{R}^3$: Un vecteur $\vec{v}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ est donné par 3 coordonnées : $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. La somme de deux vecteurs et le produit par un réel λ sont définis comme pour les vecteurs du plan.

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

La *norme* (ou longueur) d'un vecteur $\vec{v}$ est donnée par $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$.

Plans dans l'espace : Soient $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs *non colinéaires*. Le plan P passant par M_0 et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$P = \{M \in R^3 | M = M_0 + t\vec{u} + s\vec{v},\ t, s \in \mathbb{R}\}.$$

On dispose de deux types d'équations pour P

- l'équation *paramétrique* :

$$M = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow \exists s, t, \begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases}$$

- l'équation *cartésienne* : $P = (x, y, z) \in P$ si et seulement si $ax + by + cz = d$, où (a, b, c) est le *produit vectoriel* $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, autrement dit

$$a = u_2v_3 - v_2u_3,\ b = u_3v_1 - u_1v_3,\ c = u_1v_2 - u_2v_1$$

Droites dans l'espace : Soient $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathbb{R}^3$, et $\vec{u}$ un vecteur non nul. La droite D passant par M_0 et dirigée par $\vec{u}$ est l'ensemble

$$D = \{M \in R^3 | M = M_0 + t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}\}$$

On dispose de deux types d'équations pour D :

- l'équation *paramétrique* :

$$M = (x, y, z) \in D \Leftrightarrow \exists t, \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases}$$

- l'équation *cartésienne* : $M = (x, y, z) \in D$ ssi $ax + by + cz = d, ex + fy + gz = h$. On a alors écrit D comme l'intersection des plans P_1 d'équation $ax + by + cz = d$ et P_2 d'équation $ex + fy + gz = h$.

Deux droites sont parallèles ou confondues si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires, perpendiculaires s'ils sont orthogonaux.