Topologie des espaces vectoriels normés - Méthodes

Norme sur un espace vectoriel : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur E si :

1. $N(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ (Attention à bien montrer les deux implications !)
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$
3. Pour tous $(x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*)

Par ailleurs, si $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E, alors $N(x) := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ définit une norme sur E.

Normes équivalentes : Pour montrer que deux normes N_1, N_2 sur E sont équivalentes, on peut :

- Revenir à la définition et chercher des constantes $c, C > 0$ telles que
$$\forall x \in E,\ cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$
- Montrer que toute boule ouverte pour N_1 contient une boule ouverte pour N_2, et réciproquement.
- Montrer que toute suite qui converge pour N_1 converge aussi pour N_2, et réciproquement.

Pour montrer que deux normes N_1, N_2 sur E ne sont pas équivalentes, on peut :

- Raisonner par l'absurde : on suppose qu'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que
$$\forall x \in E,\ cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x)$$
et on cherche $x \in E$ tel que, par exemple, $N_1(x) = 1$ et $N_2(x) > C$.
- Chercher une suite $(x_n)_n$ de $E^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \to 0 \text{ ou } \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \to \infty$$

Ouverts : Pour montrer que $A \subset E$ est *ouvert*, on peut :

- prendre un élément quelconque $x \in A$ et chercher $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$
- montrer que A est une union ou intersection finie d'ouverts
- montrer que son complémentaire A^c est un fermé.

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas ouvert, on cherche un $x \in A$ spécifique tel que, pour tout $r > 0$, $B(x, r)$ n'est pas inclus dans A : autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $y \in B(x, r) \cap A^c$. Typiquement, x est un point du "bord".

Fermés : Pour montrer que $A \subset E$ est *fermé*, on peut :

- montrer que son complémentaire A^c est un ouvert.
- montrer que toute suite $(x_n)_n$ de points de A qui converge vers une limite ℓ dans E vérifie $\ell \in A$.
- montrer que A est une union finie ou une intersection de fermés.

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas fermé, on trouve un exemple de suite $(x_n)_n$ convergente vers un $\ell \in E$, telle que pour tout n, $x_n \in A$ mais $\ell \notin A$. Typiquement, ℓ est un point du "bord".

Intérieur : Si $A \subset E$, l'intérieur de A est défini par
$$\mathring{A} = \{x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subset A\}$$
C'est le plus grand ouvert inclus dans A. Pour montrer qu'un ensemble U est égal à $\mathring{A}$, on montre que

1. U est un ouvert inclus dans A : ceci donne $\boxed{U \subset \mathring{A}}$;
2. si $x \in A$ vérifie $x \notin U$, alors $x \notin \mathring{A}$; par contraposée, cela donne $\boxed{\mathring{A} \subset U}$. Typiquement, on montre que pour un tel x, toute boule ouverte $B(x, r)$ contient des points de A^c.

Raccourci : Si A est ouvert, alors $\mathring{A} = A$ (et réciproquement).

Adhérence : Si $A \subset E$, l'adhérence de A est défini par
$$\overline{A} = \{x \in E, \exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ u_n \to x\}.$$
C'est le plus petit fermé contenant A. Pour montrer qu'un ensemble F est bien l'adhérence de A, on montre que

1. U est un fermé contenant A : ceci donne $\boxed{\overline{A} \subset U}$;
2. tout élément $x \in F$ est limite d'une suite de points de A bien choisie ; ceci donne $\boxed{U \subset \overline{A}}$.

Raccourci : Si A est fermé, alors $\overline{A} = A$ (et réciproquement).

Intérieur, adhérence, inclusions et complémentaire : Pour tous A, B sous-ensembles de E

- $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$; $(\overline{A})^c = \overset{\circ}{\overbrace{A^c}}$; $\overline{A^c} = (\mathring{A})^c$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Attention : la réciproque est fausse !
- $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$; $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. Attention : la réciproque est fausse !