Espaces vectoriels normés - Méthodes

Norme sur un espace vectoriel : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur E si :

1. $N(\vec{x}) = 0$ si, et seulement si, $\vec{x} = 0$ (Attention à bien montrer les deux implications !)
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in E$, $N(\lambda\vec{x}) = |\lambda| N(\vec{x})$
3. Pour tous $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $N(\vec{x} + \vec{y}) \leq N(\vec{x}) + N(\vec{y})$ (*inégalité triangulaire*)

De l'inégalité triangulaire, on déduit

$$\forall\, (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2, \boxed{|\, N(\vec{x}) - N(\vec{y})\,| \leq N(\vec{x} - \vec{y})}$$

Sur un e.v.n. (E, N), on définit, pour $\vec{x}_0 \in E$ et $r > 0$:

▷ la boule ouverte $B_N(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in E, N(\vec{x} - \vec{x}_0) < r\}$
▷ la boule fermée $\overline{B}_n(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in E, N(\vec{x} - \vec{x}_0) \leq r\}$

Suites convergentes : On dit qu'une suite $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de E converge vers $\vec{x} \in E$ si $N(x_n - x) \to 0$

Ouverts et voisinages : On dit qu'une partie $A \subset E$ est un voisinage de $\vec{x} \in A$ s'il existe $r > 0$ tel que $B(\vec{x}, r) \subset A$.

On dit que $A \subset E$ est *ouvert* dans E si pour tout $\vec{a} \in A$, A est un voisinage de $\vec{a}$, autrement dit

$$\forall\, \vec{a} \in A, \exists r > 0 \text{ tel que } B(\vec{a}, r) \subset A.$$

Pour montrer que $A \subset E$ est *ouvert*, on peut :

- prendre un élément quelconque $\vec{x} \in A$ et chercher $r > 0$ tel que $B(\vec{x}, r) \subset A$
- montrer que A est une union quelconque ou intersection finie d'ouverts
- montrer que son complémentaire A^c est un fermé.

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas ouvert, on cherche un $x \in A$ spécifique tel que, pour tout $r > 0$, $B(\vec{x}, r)$ n'est pas inclus dans A : autrement dit, pour tout $r > 0$, il existe $\vec{y} \in B(\vec{x}, r) \cap A^c$. Typiquement, x est un point du “bord”.

Intérieur : Si $A \subset E$, l'intérieur de A est défini par

$$\operatorname{int}(A) = \{\vec{x} \in A, \exists r > 0, B(\vec{x}, r) \subset A\}$$

C'est le plus grand ouvert inclus dans A. Pour montrer que $\operatorname{int}(A)$ est égal à un ensemble U, on montre que

1. U est un ouvert inclus dans A : ceci donne $\boxed{U \subset \operatorname{int}(A)}$;
2. si $x \in A$ vérifie $x \notin U$, alors $x \notin \operatorname{int} A$; par contraposée, cela donne $\boxed{\operatorname{int}(A) \subset U}$. Typiquement, on montre que pour un tel x, toute boule ouverte $B(x, r)$ contient des points de A^c.

Raccourci : Si A est ouvert, alors $\operatorname{int}(A) = A$ (et réciproquement).

Fermés : Un point $\vec{x} \in E$ est *adhérent* à $A \subset E$ s'il existe une suite $(\vec{a}_n)_n$ de points de A qui converge vers $\vec{x}$.

On dit que $A \subset E$ est *fermé* si A contient tous ses points adhérents, autrement dit si pour toute suite convergente $(\vec{a}_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $\lim \vec{a}_n \in A$.

Pour montrer que $A \subset E$ est *fermé*, on peut :

- montrer que son complémentaire A^c est un ouvert.
- montrer que toute suite $(\vec{a}_n)_n$ de points de A qui converge vers une limite $\vec{\ell}$ dans E vérifie $\vec{\ell} \in A$.
- montrer que A est une union finie ou une intersection quelconque de fermés.

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas fermé, on trouve un exemple de suite $(\vec{a}_n)_n$ convergente vers un $\vec{\ell} \in E$, telle que pour tout n, $\vec{a}_n \in A$ mais $\vec{\ell} \notin A$. Typiquement, $\vec{\ell}$ est un point du “bord”.

Adhérence : Si $A \subset E$, l'adhérence de A est défini par

$$\overline{A} = \{\vec{x} \in E, \exists (\vec{a}_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\, \vec{a}_n \to \vec{x}\}.$$

C'est le plus petit fermé contenant A. Pour montrer qu'un ensemble F est bien l'adhérence de A, on montre que

1. F est un fermé contenant A : ceci donne $\boxed{\overline{A} \subset F}$;
2. tout élément $\vec{x} \in F$ est limite d'une suite de points de A bien choisie ; ceci donne $\boxed{F \subset \overline{A}}$.

Raccourci : Si A est fermé, alors $\overline{A} = A$ (et réciproquement).

Intérieur, adhérence, inclusions et complémentaire : Pour tous A, B sous-ensembles de E

- $\operatorname{int} A \subset A \subset \overline{A}$; $(\overline{A})^c = \operatorname{int}(A^c)$; $\overline{A^c} = (\operatorname{int} A)^c$.
- Si $A \subset B$ alors $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Attention : la réciproque est fausse !
- $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$; $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subset \operatorname{int}(A \cup B)$. Attention : la réciproque est fausse !

Parties bornées On dit qu'un sous-ensemble $A \subset E$ est *borné* s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B(\vec{0}, R)$, autrement dit, si

$$\exists\, R > 0,\ \forall \vec{a} \in A,\ N(\vec{a}) \leq R$$

⚠ Attention à l'ordre des quantificateurs !

Normes équivalentes : On dit que 2 normes N_1, N_2 sur E sont équivalentes s'il existe deux constantes positives C_1, C_2 telles que

$$\forall \vec{x} \in E, \begin{cases} N_1(\vec{x}) \leq C_1 N_2(\vec{x}) \\ N_2(\vec{x}) \leq C_2 N_1(\vec{x}) \end{cases}$$

Deux normes équivalentes sur E donnent :

▷ les mêmes ouverts (si A est ouvert pour l'une, il l'est pour l'autre)
▷ les mêmes fermés
▷ les mêmes suites convergentes
▷ les mêmes parties bornées

Si $\dim E < \infty$, toutes les normes sur E sont équivalentes.