# ESPACES VECTORIELS NORMES (2). (CONTINUITE)

Dans toute cette feuille, E, F, G désignent 3 evn sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, munis respectivement de $\| \|_E$, $\| \|_F$, $\| \|_G$ ; $f, f_1, f_2, \dots$ désignent des applications de E dans F ; $g, g_1, g_2 \dots$ désignent des appl de F dans G.

EVN 9

CONTINUITE en a : les 3 phrases suivantes sont équival. :

1) f est continue en $a \in E$
2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 : \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$
3) Pour toute suite $(x_n)$ telle que $\lim x_n = a$ on a $\lim f(x_n) = f(a)$

EVN 10

Si $f_1$ et $f_2$ sont continues en a, alors pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est continue en a.

EVN 11

f CONTINUE SUR E $\Leftrightarrow \forall a \in E$, f continue en a

EVN 12

COMPOSITION : 1) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue en } x_0 \\ g \text{ continue en } f(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continue en $x_0$

2) $\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } E \\ g \text{ continue sur } F \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ continue sur E

CARACTERISATION CONTINUITE SUR E : EVN 13

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur E
2) $\forall a \in E \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in E : \|x - a\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon$
3) Pour tout $O_1$ ouvert de F, $f^{-1}(O_1)$ est un ouvert de E
4) Pour tout F fermé de F, $f^{-1}(F)$ est un fermé de E
5) $\forall A \subset E \quad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$
6) Pour tout $a \in E$ et toute suite $(x_n)$ de E qui tend vers a, $\lim f(x_n) = f(a)$

UNIFORME CONTINUITE : EVN 14

1) f uniformément continue sur E si :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x, x') \in E^2 : \|x - x'\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\|_F < \varepsilon$

2) f unif. cont. sur E $\Rightarrow$ f continue sur E
3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ unif. cont. sur } E \\ g \text{ unif. cont. sur } F \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f$ unif. cont. sur E

EXEMPLES : EVN 15

1) Toute application constante est évid. continue
2) Toute translation : $t_u(x) = x + u$ est une application uniformément continue de E dans E.
3) Toute homothétie : $h_\lambda(x) = \lambda x$ est une application uniformément continue de E dans E.
4) Toute norme : $\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto \|x\|_E \end{array}$ est unif. continue sur E
5) $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{array}$ et $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x \cdot y \end{array}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$
6) Les projections $p_i : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto x_i \end{array}$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
7) Si $f_1, f_2, \dots f_n$ sont des applications continues de E dans $\mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ (pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels) et $f_1 \times f_2 \dots \times f_n$ sont aussi continues de E dans $\mathbb{R}$.
8) Toute fonction polynôme à n variables est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$
9) Toute fonction rationnelle à n variables est continue sur son domaine de définition.
10) $M \longrightarrow \det(M)$ est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

CAS PARTICULIER : $\mathbb{R}^n$. EVN 16

Soit A une partie FERMEE BORNEE de $\mathbb{R}^n$ et f une application CONTINUE de A dans $\mathbb{R}$.

Alors : 1) f est UNIFORMEMENT CONTINUE sur A.

2) f(A) est un FERME BORNE de $\mathbb{R}$ : f est donc bornée sur A et atteint ses bornes

(Plus précisément l'image par une appl. continue d'un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ sera aussi un intervalle fermé borné)

APPLICATIONS LINEAIRES CONTINUES : EVN 17

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application LINEAIRE de E ds F ; Les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

1) f est continue sur E
2) f est continue en $O_E$
3) $\|f(x)\|_F$ est bornée sur la boule unité $\{x, \|x\|_E \leq 1\}$
4) $\exists K \in \mathbb{R}^+ : \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq K \|x\|_E$

EVN 18

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires CONTINUES de E ds F est un sev de $\mathcal{L}(E, F)$.

NORME SUR $\mathcal{L}_c(E, F)$ : EVN 19

1) L'application

$$\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \|f\| = \sup\limits_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup\limits_{x \neq 0_E} \dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \end{array}$$

définit une NORME sur $\mathcal{L}_c(E, F)$

2) $\forall x \in E \qquad \|f(x)\|_F \leq \|f\| \cdot \|x\|_E$

et $\|f\|$ est le plus petit des $M \geq 0$ tels que $\forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$

NORME ET COMPOSITION : EVN 20

$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F) \quad \forall g \in \mathcal{L}_c(F, G)$

$g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$

En particulier $\|f^n\| \leq \|f\|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

EVN 21

Si F est un espace de BANACH, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est aussi de BANACH.

CAS PARTICULIER : si E de dimension FINIE EVN 22

Si E est un evn de DIMENSION FINIE et si F est un evn QUELCONQUE, toute application linéaire de E dans F est continue

donc $\dim E < +\infty \Rightarrow \mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$