ESPACES VECTORIELS

1 Un ESPACE VECTORIEL sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble E non vide pourvu de 2 lois :

1) une ADDITION interne (c.à.d. $\forall (u,v) \in E^2$, $u+v \in E$) telle que $(E,+)$ est un GROUPE COMMUTATIF, c.à.d

(A1) $\forall (u,v,w) \in E^3$, $(u+v)+w = u+(v+w)$

(A2) il existe un elt de E, noté 0 tel que $\forall u \in E$, $u+0 = 0+u = u$

(A3) Pour tout u de E, il existe un elt noté $(-u)$ tel que $u+(-u) = (-u)+u = 0$

(A4) $\forall (u,v) \in E^2$ $\quad u+v = v+u$

2) une MULTIPLICATION externe (c.à.d. $\forall (\lambda,u) \in \mathbb{K}\times E$ $\lambda u \in E$) telle que :

(M1) $\forall (\lambda,u,v) \in \mathbb{K}\times E\times E$ $\quad \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$

(M2) $\forall (\lambda,\mu,u) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E$ $\quad (\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$

(M3) $\forall (\lambda,\mu,u) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E$ $\quad \lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$

(M4) $\forall u \in E$ $\quad 1u = u$

Les éléments de E sont appelés VECTEURS, les éléments de $\mathbb{K}$ sont les SCALAIRES.

2 PROPRIETES : $\forall (u,v) \in E^2$, $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$

* $\alpha u = 0 \iff \alpha = 0$ ou $u = \vec{0}$
* $(-1)u = -u$ $\quad$ (on posera $u - v = u + (-v)$)
* $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$ et $(\lambda-\mu)u = \lambda u - \mu u$

3 EXEMPLES FONDAMENTAUX : 0) $\mathbb{K}$ est un ev sur $\mathbb{K}$.

1) Pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ev.
2) $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des $\mathbb{R}$ev.
$\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{C}_n[X]$ sont des $\mathbb{C}$ev.
3) Si A est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$ev, l'ensemble des applications de A dans E, noté $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbb{K}$ev pour les 2 lois :
   * $f+g$, définie par : $\forall x \in E$ $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
   * λf, définie par : $\forall x \in E$ $(\lambda f)(x) = \lambda . f(x)$.
4) En particulier : * si $I \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ev.
   * L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, des suites d'éléments de $\mathbb{K}$, est un $\mathbb{K}$ev.
5) L'ensemble des solutions du système HOMOGENE

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

de m équations à n inconnues

forme un (sous-)espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$

4 SOUS-ESPACE VECTORIEL : Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ev et F une partie NON VIDE de E.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1) F est un sous-espace vectoriel (sev) de E
2) $(F,+,\cdot)$ est lui aussi un $\mathbb{K}$ev
3) F est "stable pour les 2 lois"
4) $\forall (x,y) \in F\times F$ $\quad x+y \in F$ et $\forall (\lambda,x) \in \mathbb{K}\times F$ $\quad \lambda x \in F$
5) $\boxed{\forall (x,y) \in F\times F \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K} \quad \lambda x + \mu y \in F}$

Remarque : * Le vecteur nul de E appartient à TOUS les sev de E.
* $\{0\}$ et E sont 2 sev particuliers de E.

5 Soit H une partie non vide de $(E,+,\cdot)$. Une COMBINAISON LINEAIRE d'éléments de H est un élément de la forme $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$ $\begin{cases} \text{où les } \alpha_i \text{ sont des scalaires} \\ \text{et où } \forall i \quad x_i \in H \end{cases}$

6 Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ev :

1) Si F et G sont 2 sev de E, $F \cap G$ est aussi un sev de E
2) Plus généralement, toute intersection de sev de E est encore un sev de E
3) Attention : En général si F et G sont 2 sev de E, $F \cup G$ n'est pas un sev de E

7 Pour toute partie H de E, l'intersection de TOUS les sev de E contenant H est donc encore un sev contenant H : c'est le plus petit sev de E contenant H. On l'appelle sous-espace engendré par H ; on le note $\mathrm{Vect}(H)$. C'est exactement l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de H.

8 PROPRIETES DE VECT(H) :

1) Soit H partie de E et F sev de E : $\quad H \subset F \Rightarrow \mathrm{Vect}(H) \subset F$
2) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(p)})$ $\begin{cases} \text{pour toute permutation} \\ \sigma \text{ de } \{1,2,\dots,p\} \end{cases}$
3) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p, 0) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$
4) $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \dots, u_p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$
5) $\mathrm{Vect}(u_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i u_i, u_2, \dots, u_p) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$

9 PARTIE GENERATRICE :

1) H partie GENERATRICE de $E \iff \mathrm{Vect}(H) = E$
2) Si $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_m)$, on dira que E est de dimension finie (cette dimension n'est pas forcément m)
3) $\left.\begin{array}{l} H \text{ partie génératrice de } E \\ H \subset H' \end{array}\right\} \Rightarrow H'$ partie géné. de E

10 FAMILLE LIBRE, FAMILLE LIEE :

1) Les phrases suivantes sont synonymes :
   * $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ famille LIBRE de E
   * les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont LINEAIREMENT INDEPENDANTS
   * $\boxed{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0}$
2) Une famille infinie $\mathcal{L}$ sera libre si toute famille finie contenue dans $\mathcal{L}$ est libre
3) Une famille non libre est dite LIEE ; les phrases suivantes sont synonymes :
   * $(u_1, \dots, u_p)$ famille LIEE de E
   * les vect. $u_1, \dots, u_p$ sont LINEAIREMENT DEPENDANTS
   * $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \neq (0,0,\dots,0)$: $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_p u_p = 0$
4) Cas particuliers simples :
   si $u \in E$ $\quad (u)$ libre $\iff u \neq 0$
   (u,v) liée $\iff \exists \alpha \in \mathbb{K}$ $\quad u = \alpha v$ ou $v = \alpha u$

11 PROPRIETES :

1) Toute famille contenue dans une famille libre est libre.
2) Toute famille contenant une famille liée est liée.
3) Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
4) Les vecteurs d'une famille libre sont nécessairement 2 à 2 distincts, et 2 à 2 non colinéaires.
5) Une famille S est liée si et seulement si il existe au moins un vecteur de S qui est combinaison linéaire des autres vecteurs de S
6) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de E. Alors
$u \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) \iff (u_1, \dots, u_p, u)$ liée.

12 BASE : Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$ev.
On appelle BASE de E toute famille de E à la fois LIBRE et GENERATRICE.