Ensembles, applications et relations

Ensembles : Un ensemble E est caractérisé par la liste de ses éléments.

- *Appartenance :* On note $x \in E$ pour indiquer que l'élément x appartient à l'ensemble E, $x \notin E$ dans le cas contraire.
  ⚠ Un ensemble peut être élément d'un autre : ainsi, $x \in E$ a un sens même si x est un ensemble lui-même.
- *Ensemble vide :* On note $\emptyset$ l'ensemble vide, qui ne contient aucun élément : quel que soit x, $x \notin \emptyset$.
- *Inclusion :* Pour deux ensembles E, F, on note $E \subset F$ si E est inclus dans F, c'est-à-dire

$$\boxed{E \subset F \Leftrightarrow \forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in F)}$$

⚠ L'inclusion n'a de sens qu'entre deux ensembles.

Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E, on a $\emptyset \subset E$.
- *Transitivité de l'inclusion :* Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.
- *Double inclusion :* Si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.

Méthodes :

- *Pour montrer que $E \subset F$:* On prend un élément quelconque $x \in E$ et on montre qu'il est dans F.
- *Pour montrer que $E \not\subset F$:* On veut montrer $\neg(\forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in\ F))$ c'est à dire

$$\boxed{\exists x, x \in E \wedge x \notin\ F} :$$

  il suffit donc de trouver un élément de E qui n'est pas dans F.
- *Pour montrer qu'un ensemble est vide :* On peut procéder par l'absurde : on suppose qu'il existe $x \in E$ et on montre que cela donne une contradiction.
- *Pour montrer que deux ensembles sont égaux :*
  - On peut montrer $x \in E \Leftrightarrow x \in F$
    ⚠ il faut être sûr de garder l'équivalence à chaque étape du raisonnement !
  - On peut procéder par double inclusion, c'est à dire montrer $E \subset F$ et $F \subset E$.

Union, intersection, différence : Soit U un ensemble et A, B deux sous-ensembles.

- *Complémentaire* : Le complémentaire de A est noté A^c et est définie par $\boxed{x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A}$.
- *Union* : L'union de A et B est notée $A \cup B$ et est définie par $\boxed{x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)}$.
- *Intersection* : L'intersection de A et B est notée $A \cap B$ et est définie par $\boxed{x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)}$.
- *Différence* : "A privé de B" se note $A \backslash B = A \cap B^c$: $\boxed{x \in A \backslash B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)}$.

Partitions : Un ensemble $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ de sous-ensembles de E est une *partition* de E si

- $E = \cup_i P_i$: les P_i "recouvrent" complètement E
- $\forall i \neq j$, $P_i \cap P_j = \emptyset$: les P_i ne s'intersectent pas entre eux.

Propriétés : A, B, C sous ensembles de U

- On a $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- *Commutativité :* $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
- *Associativité :* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = U$, $(A^c)^c = A$
- *Lois de De Morgan :* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
- *Distributivité :* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Fonctions : Une fonction $f : E \to F$ associe à chaque élément x de E un unique élément de F, noté $f(x)$.

Si $y \in F$, et $x \in E$ sont tels que $f(x) = y$, on dit que y est l'*image* de x par f et x un *antécédent* de y par f.

⚠ x n'a qu'une seule image, mais y peut avoir plusieurs, ou aucun, antécédents.

Identité : On appelle *fonction identité de E*, notée id_E, l'application $id_E : E \to E, x \mapsto x$.

Composée : Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux fonctions. On appelle *fonction composée*, notée $g \circ f$, l'application $g \circ f : E \to H, x \mapsto g(f(x))$.

Image directe, image réciproque : Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle *image directe* de A par f l'ensemble

$$\boxed{f(A) = \{y \in F, \exists x \in E \text{ tq } f(x) = y\}}$$

- Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}}$$

⚠ Attention, la notation est trompeuse : ceci ne suppose pas que l'application réciproque f^{-1} existe.

Injectivité Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *injective* si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- Chaque élément y de F a soit 0, soit 1 antécédent par f ;
- Pour tout $x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
- Pour tout $x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Méthodes

- Pour montrer que f est injective, on prend deux éléments *quelconques* x et x' de E, on suppose que $f(x) = f(x'$ et on montre que $x = x'$.
- Pour montrer que f n'est pas injective, on trouve deux *exemples* x et x' de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

Surjectivité Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *surjective* si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- Chaque élément y de F a au moins 1 antécédent par f ;
- Pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$;
- $f(E) = F$.

Méthodes

- Pour montrer que f est surjective, on prend un élément *quelconque* y de F, et on cherche $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, on résoud l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.
- Pour montrer que f n'est pas surjective, on trouve un *exemple* d'élément y de F qui n'a pas d'antécédent par f, c'est-à-dire tel que pour tout x dans E, $f(x) \neq y$.

Bijectivité : Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *bijective* si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

- Chaque élément y de F a exactement 1 antécédent par f ;
- Pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$;
- f est injective et surjective ;
- il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. On dit alors que g est *l'inverse* ou *réciproque* de f, et on la note f^{-1}.

Méthodes

- Pour montrer que f est bijective, on montre qu'elle est injective et surjective.
- Pour trouver la réciproque de f, on résoud l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; l'unique solution, qui dépend de y, donne $f^{-1}(y)$.

Relations : Soient E et F deux ensembles. Une *relation binaire* $\mathcal{R}$ de E dans F est définie comme un sous-ensemble de $E \times F$: $\boxed{\mathcal{R} \subset E \times F}$. Les couples (x, y) qui sont dans $\mathcal{R}$ sont ceux tels que x est en relation avec y.

Vocabulaire : Une relation $\mathcal{R}$ sur $E \times E$ est :

- *réflexive* si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$ (tout x est en relation avec lui-même)
- *transitive* si $\forall x, y, z \in E^3, (x\mathcal{R}y \ \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$.
- *symétrique* si $\forall x, y,\ (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (y\mathcal{R}x)$.
- *antisymétrique* si $\forall x, y,\ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$. Autrement dit, on ne peut avoir x en relation avec y en même temps que y avec x que s'ils sont égaux.
- *totale* si $\forall x, y,\ x\mathcal{R}y \vee y\mathcal{R}x$. Autrement dit, deux éléments quelconques sont en relation, dans un sens ou dans un autre ; on peut toujours les "comparer".

Relations d'équivalence : Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est une *relation d'équivalence* si elle est *réflexive, transitive et symétrique*. Généralement, deux éléments de E vont être équivalents s'ils ont une propriété commune.

Exemples : L'égalité sur E et le parallélisme sur l'ensemble des droites du plan sont des relations d'équivalence. La relation d'ordre strict $<$ sur $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Classes d'équivalence : Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, on peut réunir les éléments équivalents entre eux dans différents "paquets". Plus précisément, pour $x \in E$, on appelle *classe d'équivalence de* x l'ensemble

$$\boxed{[x] = \{y \in E,\ x\mathcal{R}y\}}$$

Alors, chaque élément de E est dans une, et une seule, de ces classes d'équivalence : autrement dit, les classes d'équivalence forment une *partition* de E.

Relations d'ordre : Une relation $\mathcal{R}$ de E dans E est une *relation d'ordre* si elle est *réflexive, transitive et antisymétrique*. On dit alors que $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble ordonné*. Une relation d'ordre est *totale* si on peut toujours comparer deux éléments (voir encadré **Relations**).

Exemples : L'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est un ordre total. L'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre non totale.

Majorants, minorants : En analyse, on sera fréquemment amenés à utiliser les relations d'ordre pour majorer (typiquement, l'écart entre deux points, par exemple pour la continuité, ou la convergence de suite) ou à minorer. On introduit donc les notions suivantes :

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Soit $X \subset E$.

- M est un *majorant* de X si $\forall x \in X, x\mathcal{R}M$. C'est un *maximum* si de plus $M \in X$.
  Exemple : 42 est un majorant de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}, \leq)$. 1 en est un maximum.
- m est un *minorant* de X si $\forall x \in X, m\mathcal{R}x$.C'est un *minimum* si de plus $m \in X$.
  Exemple : $\emptyset$ est un minorant (et un minimum) de $\mathcal{P}(E)$ dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$.

Toutefois, le minimum et le maximum n'existent pas toujours : ainsi, $]0, 1[$ n'a ni l'un ni l'autre. On introduit donc

- la *borne inférieure* de X est son plus grand minorant ;
- la *borne supérieure* de X est son plus petit majorant.

⚠ Les bornes supérieures et inférieures non plus n'existent pas toujours : ainsi, $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ dans $(\mathbb{Q}, \leq)$ n'a ni l'un ni l'autre. Cependant, *toutes* les parties majorées de $(\mathbb{R}, \leq)$ ont une borne sup, et *toutes* les parties minorées une borne inf.

Méthode : Pour montrer que $s \in E$ est la borne supérieure d'un sous-ensemble X, il faut :

1. montrer que s est un majorant de X, autrement dit que pour tout $x \in X$, $x\mathcal{R}s$
2. et montrer que si M est un majorant de X, alors $s\mathcal{R}M$: autrement dit, les autres majorants sont plus grands.