RAPPELS ENSEMBLISTES

1 Symboles de base:

a) Le symbole Ø désigne "l'ensemble vide", c'est-à-dire l'ensemble ne contenant aucun élément.
b) Le symbole $\in$ se lit "appartient à" : $a \in A$ signifie que l'élément a appartient à l'ensemble A.
c) Le symbole $\notin$ se lit "n'appartient pas à" : $a \notin A$ signifie que l'élément a n'appartient pas à l'ensemble A.

2 Inclusion, non-inclusion:

a) Le symbole $\subset$ se lit "est inclus dans" : $A \subset B$ signifie que tout élément de A appartient aussi à B.

$$(A \subset B) \Leftrightarrow (\forall a \in A, a \in B)$$

a) Le symbole $\not\subset$ se lit "n'est pas inclus dans" : $A \not\subset B$ signifie qu'il existe un élément de A qui n'appartient pas à B.

$$(A \not\subset B) \Leftrightarrow (\exists a \in A, a \notin B)$$

3 Propriétés de l'inclusion:

a) Ø est inclus dans tout ensemble A: $\emptyset \subset A$
b) Tout ensemble A est inclus dans lui-même: $A \subset A$
c) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Leftrightarrow A = B$
d) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

4 Parties complémentaires:

Soit $A \subset E$ (on dit alors que A est un sous-ensemble de E, ou une partie de E). On appelle "complément" ou "complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Ce complément se désigne par $\complement_E A$ ou bien, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, par $\overline{A}$ (qu'il ne faut pas confondre avec l'adhérence topologique, qui sera vue plus tard)

5 Intersection, réunion, différence:

Soit E un ensemble, et A, B et C trois parties de E.

a) On appelle " **intersection** de A et de B " et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B)$$
$$(C \subset (A \cap B)) \Leftrightarrow (C \subset A \text{ et } C \subset B)$$

On a: $A \cap B = B \cap A$, $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$

b) On appelle " **réunion** de A et de B " et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent A ou à B.

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B)$$

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \text{ et } x \notin B \\ \text{ou} \\ x \notin A \text{ et } x \in B \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } x \in B \end{cases}$$

$$((A \cup B) \subset C) \Leftrightarrow (A \subset C \text{ et } B \subset C)$$

On a: $A \cup B = B \cup A$, $A \subset (A \cup B)$ et $B \subset (A \cup B)$
et, bien sûr, $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

c) On appelle " **différence** " et on note $A - B$ l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B.

$$(x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B)$$
$$A - B = A \cap \overline{B}$$

6 Propriétés opératoires:

Pour toutes les parties A, B, C de l'ensemble E, on aura:

a) $\overline{\overline{A}} = A$; $\overline{E} = \emptyset$; $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$

b) Lois de De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

c) $A \cap A = A$; $A \cup A = A$; $A - A = \emptyset$
d) $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \emptyset = A$; $A - \emptyset = A$; $\emptyset - A = \emptyset$
e) $A \cap E = A$; $A \cup E = E$; $A - E = \emptyset$; $E - A = \overline{A}$
f) **Commutativité:** $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
mais, bien sûr, $A - B = A \cap \overline{B} \neq B - A = B \cap \overline{A}$
g) **Associativité:** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
h) **Distributivité:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

7 Applications:

Soit E et F deux ensembles: $\boxed{f \text{ application de } E \text{ dans } F}$

signifie $\boxed{\text{à tout } x \in E, f \text{ associe une seule image par } f}$

8 Ensemble des applications:

Soit E et F deux ensembles. L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E,F)$ ou encore F^E.
Si $card(E) = p$ et $card(F) = n$,
alors $card(F^E) = n^p = card(F)^{card(E)}$

9 Application identique:

Soit E et un ensemble. On appelle "application identique" ou encore "identité de E " et on note Id_E (ou Id si il n'y a aucun risque d'ambiguïté) l'application de E dans E définie par:

$$\forall x \in E \quad Id_E(x) = x$$

10 Image directe, image réciproque:

Soit $f: E \to F$ une application.
a) pour toute partie A de E, on appelle **image directe** de A la partie $f(A)$ de F définie par

$$f(A) = \{y \in F ; \exists x \in A : y = f(x)\}$$

b) pour toute partie B de F, on appelle **image réciproque** de B la partie $f^{-1}(B)$ de E définie par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$$

11 Composée de deux applications:

Soit E, F et G trois ensembles, f et g deux applications:

$$f: E \to F \quad \text{et} \quad g: F \to G$$

On appelle **composée** et on note $g \circ f$ l'application h de E dans G définie par:

$$\boxed{\forall x \in E \quad h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Propriété essentielle: **Associativité de la composition:**
Si f, g, h sont trois applications:

$$f: E \to F \ ; \ g: F \to G \ ; \ h: G \to H$$

alors: $\boxed{(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)}$ notée $h \circ g \circ f$

Attention: si $E = F = G$, alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies toutes deux, mais ces sont en général deux applications différentes.

12 Application injective ou injection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 5 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **injective**;
b) tout $y \in F$ a **au plus** un antécédent (c'est-à-dire 1 ou 0)
c) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x, $y = f(x)$ a **au plus** une solution
d) $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
e) $\forall x \in E \quad \forall x' \in E \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

13 Application surjective ou surjection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 5 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **surjective**;
b) tout $y \in F$ a **au moins** un antécédent;
c) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x,
$y = f(x)$ a **au moins** une solution;
d) $\forall y \in F \quad \exists x \in E : y = f(x)$
e) $f(E) = F$

14 Application bijective ou bijection:

Soit $f: E \to F$ une application.
Les 6 assertions suivantes sont équivalentes:
a) f est **bijective**;
b) f est injective et surjective;
c) tout $y \in F$ a **exactement** un antécédent;
d) Pour tout $y \in F$, l'équation, d'inconnue x,
$y = f(x)$ a **exactement** une solution;
e) $\forall y \in F \quad \exists! x \in E : y = f(x)$
f) Il existe une application $g: F \to E$ telle que
$g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$