Ensembles, familles, applications

Ensembles : Un ensemble E est caractérisé par la liste de ses éléments.

- *Appartenance :* On note $x \in E$ pour indiquer que l'élément x appartient à l'ensemble E, $x \notin E$ dans le cas contraire.
  ⚠ Un ensemble peut être élément d'un autre : ainsi, $x \in E$ a un sens même si x est lui-même un ensemble.
- *Inclusion :* Pour deux ensembles E, F, on note $E \subset F$ si E est inclus dans F, c'est-à-dire

$$\boxed{E \subset F \Leftrightarrow \forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in F)}$$

  ⚠ L'inclusion n'a de sens qu'entre deux ensembles.

Propriétés :

- Quel que soit l'ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$.
- *Transitivité de l'inclusion :* Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.
- *Double inclusion :* Si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.

Méthodes :

- *Pour montrer que $E \subset F$:* On prend un élément quelconque $x \in E$ et on montre qu'il est dans F.
- *Pour montrer que $E \not\subset F$:* On veut montrer $\neg(\forall x, (\ x \in E \Rightarrow x \in\ F))$ c'est à dire

$$\boxed{\exists x, x \in E \text{ et } x \notin\ F} :$$

  il suffit donc de trouver un élément de E qui n'est pas dans F.
- *Pour montrer qu'un ensemble est vide :* On peut procéder par l'absurde : on suppose qu'il existe $x \in E$ et on montre que cela donne une contradiction.
- *Pour montrer que deux ensembles sont égaux :*
  - On peut montrer $x \in E \Leftrightarrow x \in F$
    ⚠ il faut être sûr de garder l'équivalence à chaque étape du raisonnement !
  - On peut procéder par double inclusion, c'est à dire montrer $E \subset F$ et $F \subset E$.

Union, intersection, différence : Soit U un ensemble, A, B deux sous-ensembles et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles.

- *Complémentaire* : Le complémentaire de A est noté A^c et est définie par $\boxed{x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A}$.
- *Union* : L'union des $(A_i)_{i\in I}$ est notée $\bigcup_{i\in I} A_i$ et est définie par

$$\boxed{x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I,\, x \in A_i}.$$

- *Intersection* : L'intersection des $(A_i)_{i\in I}$ est notée $\bigcap_{i\in I} A_i$ et est définie par

$$\boxed{x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I,\, x \in A_i}.$$

- *Différence* : "A privé de B" se note $A\backslash B = A \cap B^c$: $\boxed{x \in A\backslash B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)}$.

Propriétés : $(A_i)_{i\in I}$, B sous ensembles de U

- On a , pour tout $i_0 \in I$,

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$$

- *Distributivité :* $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$
- *Lois de De Morgan :* $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I}(A_i^c)$, $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I}(A_i^c)$.

Applications : Une application $f : E \to F$ associe à chaque élément x de E un unique élément de F, noté $f(x)$.

Si $y \in F$, et $x \in E$ sont tels que $f(x) = y$, on dit que y est l'*image* de x par f et x un *antécédent* de y par f.
⚠ x n'a qu'une seule image, mais y peut avoir plusieurs, ou aucun, antécédents.

Image directe, image réciproque : Soit $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle *image directe* de A par f l'ensemble

$$\boxed{f(A) = \{y \in F, \exists\, x \in A \text{ tq } f(x) = y\}}$$

- Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* de B par f l'ensemble

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}}$$

⚠ Attention, la notation est trompeuse : ceci ne suppose pas que l'application réciproque f^{-1} existe.

Propriétés : Soit $f : E \to F$ une application, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E et $(B_j)_{j\in J}$ une famille de sous-ensembles de F.

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ ⚠ Ce n'est pas une égalité !
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$
5. $A \subset f^{-1}(f(A))$ et si f est injective, c'est une égalité.
6. $f(f^{-1})(B) \subset B$ et si f est surjective, c'est une égalité.

Injectivité Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *injective* si, pour tout $x, x' \in E$,

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Surjectivité Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *surjective* si $f(E) = F$.

Bijectivité : Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *bijective* si $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Dans ce cas, il existe une application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$. On dit alors que g est la *réciproque* de f, et on la note f^{-1}.

Méthodes

- Pour montrer que f est injective, on prend deux éléments *quelconques* x et x' de E, on suppose que $f(x) = f(x')$ et on montre que $x = x'$.
- Pour montrer que f n'est pas injective, on trouve deux *exemples* x et x' de E tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.
- Pour montrer que f est surjective, on prend un élément *quelconque* y de F, et on cherche $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, on résoud l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.
- Pour montrer que f n'est pas surjective, on trouve un *exemple* d'élément y de F qui n'a pas d'antécédent par f, c'est-à-dire tel que pour tout x dans E, $f(x) \neq\ y$.
- Pour montrer que f est bijective, on montre qu'elle est injective et surjective.
- Pour trouver la réciproque de f, on résoud l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x ; l'unique solution, qui dépend de y, donne $f^{-1}(y)$.

Ensembles finis : On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une bijection $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to E$.

Dans ce cas, n est unique (sinon on aurait une bijection $\{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots m\}$, ce qui n'est pas possible). On appelle n le cardinal de E, noté $\mathrm{Card}(E)$.

Deux ensembles finis E et E' ont même cardinal si, et seulement si, il existe une bijection entre E et E'.

Un ensemble est *infini* s'il n'est pas...fini.

Exemples : $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$, $\mathrm{Card}(\{\emptyset\}) = 1$.

Propriétés : Soient E, F deux ensembles finis.

- S'il existe une application injective $E \to F$, alors $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$.
- S'il existe une application surjective $E \to F$, alors $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$.
- $\mathrm{Card}(E \cup F)$ =$\mathrm{Card}(E)$+$\mathrm{Card}(F)$-$\mathrm{Card}(E \cap F)$.
- $\mathrm{Card}(E \times F)$ =$\mathrm{Card}(E)\times$ $\mathrm{Card}(F)$.
- Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{Card}(E)}$.

Ensembles dénombrables : On dit qu'un ensemble E est *dénombrable* s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$. On dit qu'il est *au plus dénombrable* s'il est fini ou dénombrable.

Remarques :

1. Tous les ensembles dénombrables sont en bijection entre eux. Dans ce sens, ils ont "le même nombre d'éléments".
2. Si E est infini, alors E contient un sous-ensemble dénombrable (pourquoi ?). Les ensembles dénombrables sont donc "les plus petits des ensembles infinis".

Propriétés :

- Si E est dénombrable et $E_0 \subset E$, E_0 est au plus dénombrable.
  Remarque : On en déduit que $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.
- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles dénombrables, alors $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ est dénombrable.
  Remarque : On en déduit que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable (i.e I dénombrable) d'ensembles dénombrables (i.e $\forall i \in I, E_i$ dénombrable). Alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est dénombrable.
- Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles dénombrables, alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est dénombrable.

Remarque : On en déduit que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, ainsi que $\mathbb{Q}$, vu comme sous ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

Ensembles infinis non dénombrables : Tout est dans le nom. Ce sont les "types d'infinis" plus "gros" que les ensembles dénombrables.

On peut montrer que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable. De manière générale, si X est dénombrable alors $\mathcal{P}(X)$ est infini non dénombrables.

Par ailleurs, $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable (voir "l'argument diagonal de Cantor"), et tout intervalle $]a, b[$ est également infini non dénombrable.

Plus généralement, si $X \subset Y$ et X est infini non dénombrable, alors Y est également infini non dénombrable.