Formes linéaires, espace dual, bases duales et antéduales

Hyperplans et formes linéaires : E un $\mathbb{R}$-e.v. Une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$.

L'ensemble des formes linéaires sur E est un espace vectoriel, appelé espace dual de E et noté E^*.

Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel H de E qui admet un supplémentaire de dimension 1 :

$$\exists\, u_0 \in E \setminus \{0_E\}, E = H \oplus \mathrm{Vect}(u_0)$$

De plus, on a

- H est un hyperplan de E ssi $\exists\, \varphi \in E^*$ telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi$
- *Si* $\dim E = n < \infty$, H est un hyperplan de E ssi c'est un s.e.v. de dimension $n-1$.

Méthode : Pour montrer que $H \subset E$ est un hyperplan :

- *Méthode 1 :* Trouver une forme linéaire φ telle que $H = \{u \in E,\ \varphi(u) = 0\}$.
  $\rightsquigarrow$ Si H est donné par une équation $H = \{u \in E,\ A(u) = 0\}$, on peut essayer de poser $\varphi(u) = A(u)$ et montrer que φ est une application linéaire sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- *Méthode 2 :* Si $\dim E = n < \infty$, on peut montrer que H est un s.e.v. et trouver une base de H de cardinal $n-1$.

Base duale : Supposons que $\dim E = n$. On considère une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E. Alors pour chaque $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$. Les λ_i sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit

$$u_i^* : x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \in E \mapsto \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Alors, pour tout i, u_i^* est une forme linéaire et la famille $\mathscr{B}^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$ est une base de E^* qu'on appelle la base duale de la base $\mathscr{B}$.

La base duale vérifie donc

- $\forall 1 \leq i, j \leq n,\ u_i^*(u_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$
- $\forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n u_i^*(x) u_i$.
- $\rightsquigarrow$ Puisque E^* a une base à $n = \dim E$ éléments, on $\dim E^* = \dim E$.

Exemple : Si $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, la base duale $\mathscr{B}^*$ est donnée par

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ e_i^*(x) = x_i.$$

Méthode : Pour déterminer la base duale d'une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E :

- *Méthode 1 : Si* $E = \mathbb{R}^n$, pour chaque i, on écrit
  $$u_i^*(x) = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$$
  et on détermine les coefficients a_{ij} en résolvant le système donné par les n équations d'inconnues $(a_{i1}, \dots, a_{in})$
  $$u_i^*(u_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases},\ j = 1, \dots, n$$
- *Méthode 2 :* Pour un vecteur quelconque $x \in E$, on cherche les coordonnées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de x dans la base $\mathscr{B}$, et on a alors, pour chaque i, $u_i^*(x) = \lambda_i$.

Base antéduale : On peut procéder "dans l'autre sens" : partir d'une base de E^* et chercher une base de E associée à cette base de E^*.

Plus précisément, soit $\mathscr{B}^* = (f_1, \dots, f_n) \subset E^*$ une base de E^*.

Alors il existe une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E telle que $\mathscr{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ est la base duale de $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$.

On dit que $\mathscr{B}$ est la base antéduale de $\mathscr{B}^*$.

Méthodes :

- *Pour montrer qu'une famille* $(f_1, \dots, f_n) \subset E^*$ *est une base de* E^* *:* Puisque $\dim E^* = n$ il suffit de montrer que c'est une famille libre. Pour cela, on prend n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que
  $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_n f_n = 0_{E^*}$$
  on a alors
  $$(\star) \quad \forall u \in E \lambda_1 f_1(u) + \lambda_2 f_2(u) + \ldots + \lambda_n f_n(u) = 0$$
  On choisit une base $\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de E (typiquement, la base canonique) et on a donc
  $$(\star) \iff \begin{cases} \lambda_1 f_1(e_1) + \lambda_2 f_2(e_1) + \ldots + \lambda_n f_n(e_1) & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1 f_1(e_n) + \lambda_2 f_2(e_n) + \ldots + \lambda_n f_n(e_n) & = 0 \end{cases}$$
  En calculant les coefficients $f_i(e_j)$, on obtient ainsi un système d'inconnues $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ qu'on résoud pour montrer que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
- *Pour trouver la base antéduale d'une base* $\mathscr{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ *de* E^* *:* On trouve chaque vecteur u_i de la base antéduale en résolvant le système (S_i) associé :
  $$(S_1) \begin{cases} f_1(u_1) & = 1 \\ f_2(u_1) & = 0 \\ & \vdots \\ f_n(u_1) & = 0 \end{cases}, \dots, (S_n) \begin{cases} f_1(u_n) & = 0 \\ f_2(u_n) & = 0 \\ & \vdots \\ f_n(u_n) & = 1 \end{cases}$$
  On peut aussi résoudre le système général d'inconnue u et de second membre $(x_1, \dots, x_n)$:
  $$(S) \begin{cases} f_1(u) & = x_1 \\ f_2(u) & = x_2 \\ & \vdots \\ f_n(u) & = x_n \end{cases}$$
  $\rightsquigarrow$ On trouve les coordonnées de u en fonction des x_i. Puis, pour obtenir la base antéduale $\{u_1, \dots, u_n\}$:
  - Pour u_1, on prend $x_1 = 1, x_2 = 0, ..., x_n = 0$;
  - Pour u_2, on prend $x_1 = 0, x_2 = 1, ..., x_n = 0$;
  - ...Pour u_n, on prend $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 1$.