

Différentiabilité dans les e.v.n. - Méthodes

Différentiabilité : Méthode 1 : la définition. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Pour montrer que f est différentiable en a :

1. On calcule $f(a+h)$
2. On répartit les différents termes obtenus entre ce qui ne dépend pas de h (et qui doit faire $f(a)$), ce qui dépend linéairement de h , et le reste :

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + R(h)$$

3. On montre que $\frac{1}{\|h\|}R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
 4. On conclut que f est différentiable et que $Df(a) = L$.
- ▲ Attention : Il ne suffit pas de montrer que $R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Méthode 2 : le critère pratique. On peut aussi montrer que f est \mathcal{C}^1 en a , ce qui implique que f est différentiable en a . Si $E = \mathbb{R}^n$, il suffit pour cela

1. de calculer les dérivées partielles de f en a et au voisinage de a
2. et de montrer qu'elles sont continues en a .
3. On conclut que f est différentiable et pour $h \in E$,

$$Df(a)(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$$

Méthode 3 : fonctions d'une seule variable. Si $E = \mathbb{R}$, alors f est différentiable si, et seulement si, f est dérivable. Il suffit donc de montrer que $f'(a) \in F$ existe. Alors f est différentiable et, pour $h \in E = \mathbb{R}$, $Df(a)(h) = f'(a)h$.

Calcul des dérivées directionnelles et partielles :

Pour calculer la dérivée d'une application f en $a \in U$ dans la direction d'un vecteur $v \in E$, on calcule le taux d'accroissement $\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$ et on montre qu'il a une limite quand $t \rightarrow 0$. Cette limite donne $\tilde{D}f(a, v)$.

Si $E = \mathbb{R}^n$, on calcule généralement les dérivées partielles de f en appliquant les règles usuelles de dérivation à une des variables, en fixant les autres. Autrement dit, on considère les applications partielles $\varphi_i : x \in \mathbb{R} \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$, qui sont de braves fonctions d'une variable, et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \varphi_i'(a_i) \text{ pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

▲ Pour des fonctions définies par différentes formules sur différentes régions de \mathbb{R}^n , typiquement

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

les dérivées partielles en $(0, 0)$ s'obtiennent par le calcul du taux d'accroissement. Ainsi,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)).$$

Il ne suffit pas de dériver 0 !

Non-différentiabilité : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Pour montrer que f n'est pas différentiable en $a \in U$, on peut, par ordre croissant de résistance de la part de f :

- Montrer que f n'est pas continue en a .
- Montrer qu'il existe une direction v dans laquelle f n'admet pas de dérivée directionnelle
- (Si $E = \mathbb{R}^n$:) Calculer les dérivées partielles de f en a ; alors, si f était différentiable, on aurait

$$Df(a)(h) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$$

On cherche alors une contradiction :

- soit en montrant que, avec cette formule pour $Df(a)$, le reste $\frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - Df(a)(h))$ ne tend pas vers 0 quand h tend vers 0,
- soit en montrant qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $\tilde{D}f(a, v) \neq \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i$

▲ : Il ne suffit pas de montrer que f n'est pas \mathcal{C}^1 , c'est-à-dire que les dérivées partielles ne sont pas continues !

Règles de calcul :

- Si $f, g : U \rightarrow F$ sont différentiables en $a \in U$, alors pour tous λ, μ dans \mathbb{R} , $\lambda f + \mu g$ aussi, et $D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a)$.
- Si $F = \mathbb{R}$, et si $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en $a \in U$, alors fg aussi et $D(fg)(a) = f(a)Dg(a) + g(a)Df(a)$.
- ▲ ça n'a de sens que pour des fonctions à valeurs réelles !
- Si $f : U \rightarrow F$ est différentiable en a , et $g : V \subset F \rightarrow G$ est différentiable en $f(a)$ (en particulier, $f(a) \in V$), alors $g \circ f$ est différentiable en a et

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$$

Ce dernier point est particulièrement intéressant, car si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $G = \mathbb{R}^m$, on peut calculer la différentielle de la composée via le produit des matrices jacobiniennes de f et g :

$$\text{Jac}_{(g \circ f)}(a) = \text{Jac}_g(f(a)) \cdot \text{Jac}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_p}(f(a)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_p}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Une autre application de cette formule est le cas suivant. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $\varphi_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en t_0 . Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ une application différentiable en $\varphi(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$. Alors l'application $g : I \rightarrow F, t \mapsto f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ est dérivable en t_0 et

$$g'(t_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t_0))\varphi_i'(t_0)$$