Différentielles, dérivées directionnelles, dérivées partielles - Vocabulaire

Différentiabilité : Soit E, F deux e.v.n, $U \subset E$ un ouvert. Une application $f : U \to F$ est *différentiable* en $a \in U$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que, pour tout $h \in E$ tel que $a+h \in U$,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\varepsilon(h)}$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$; on note alors $L = Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$. Autrement dit, on peut approcher f par une application linéaire au voisinage de a.

Propriété : Si f est différentiable en a, f est continue en a.

Exemples :

- Si f est constante, elle est différentiable en tout $a \in E$ et $\boxed{Df(a)(h) = 0.}$
- Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$, f est différentiable en tout $a \in E$ et $\boxed{Df(a)(h) = L(h).}$

Lien avec la dérivée : Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *dérivable* en a, alors f est différentiable en a et sa différentielle est l'application linéaire

$$\begin{aligned} Df(a) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto f'(a)h \end{aligned}$$

Plus généralement, si $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ est une fonction d'une variable, alors elle est dérivable ssi

$$\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$$

a une limite $f'(a) \in F$ quand $h \to 0$. Si f est dérivable, alors f est différentiable, et $Df(a)(h) = f'(a)h$.

⚠ Attention : La notion de dérivabilité n'a de sens que pour les fonctions d'une variable ; sinon, on ne peut pas diviser par h !

Dérivée directionnelle : Soit $f : U \to F$, $a \in U$, $v \in E$. Alors f admet une *dérivée en a dans la direction de v* si

$$\frac{1}{t}(f(a+tv) - f(a))$$

a une limite $\vec{D}f(a,v)$ quand $t \to 0$.

Si f est différentiable en a, alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée en a dans la direction de v et

$$\boxed{\vec{D}f(a,v) = Df(a)(v).}$$

⚠ Attention : La réciproque est fausse ! L'application

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} x \text{ si } y = 0 \\ 0 \text{ si } y \neq 0 \end{cases}$$

admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en 0 mais n'est pas différentiable en 0.

Dérivées partielles : Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, on appelle *i-ème dérivée partielle* la dérivée directionnelle dans la direction de e_i (si elle existe !) :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(a_1, \dots, a_i + t, \dots a_n) - f(a)) \in F.}$$

C'est donc la dérivée de $x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, \dots, a_n)$ en a_i, c'est-à-dire la dérivée de f "par rapport à x_i".

Si f est différentiable en a, elle admet donc des dérivées partielles en a, et on a

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \vec{D}f(a, e_i) = Df(a)(e_i).}$$

⚠Attention : la réciproque est fausse ! L'application

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admet des dérivées partielles en $(0,0)$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Matrice jacobienne : Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$ et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de E, si $f : x = (x_1, \dots, x_n) \in U \mapsto (f_1(x) \dots, f_p(x)) \in F$ est différentiable en a, $Df(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ admet une matrice dans la base canonique dont la i-ème colonne est donnée par

$$Df(a)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(a)).$$

On l'appelle *matrice jacobienne de f en a* :

$$\boxed{\mathrm{Jac}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})}$$

Applications $\mathcal{C}^1$: Une application $f : U \to F$ est *de classe $\mathcal{C}^1$* si elle est différentiable sur U et si l'application

$$\begin{aligned} Df : U &\to \mathcal{L}(E,F) \\ x &\mapsto Df(x) \end{aligned}$$

est continue sur U.

⚠Ce n'est pas pareil que de dire que l'application linéaire $h \mapsto Df(x)(h)$ est continue pour tout x !

Théorème : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$. Alors f est $\mathcal{C}^1$ ssi ses dérivées partielles sont définies et continues sur U.

C'est le critère qu'on utilise souvent, en pratique, pour montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable.