Déterminants

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$

1

a) Si une ligne de A est nulle, $\det(A) = 0$.

b) Si une colonne de A est nulle, $\det(A) = 0$.

c) Si deux lignes de A sont proportionnelles, $\det(A) = 0$.

d) Si deux colonnes de A sont proportionnelles, $\det(A) = 0$.

e) lignes de A linéairement dépendantes $\Longleftrightarrow \det(A) = 0$.

f) lignes de A linéairement indépendantes $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

g) colonnes de A linéairement dépendantes $\Longleftrightarrow \det(A) = 0$.

h) colonnes de A linéairement indépendantes $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$.

i) $\boxed{A \text{ inversible} \Longleftrightarrow \det(A) \neq 0}$

2

Si l'on obtient B à partir de A

a) par $L_i \leftrightarrow L_j \quad (i \neq j)$: $\det(B) = -\det(A)$

b) par $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \quad (i \neq j)$: $\det(B) = \det(A)$

c) par $L_i \leftarrow L_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j L_j$: $\det(B) = \det(A)$

d) par $L_i \leftarrow \alpha L_i$: $\det(B) = \alpha \det(A)$

e) par $L_i \leftarrow \alpha L_i + \beta L_j$: $\det(B) = \alpha \det(A)$

f) en faisant passer une ligne "par dessus p lignes"
$\det(B) = (-1)^p \det(A)$

Résultats analogues pour des manipulations sur les colonnes.

3

a) $\det(\lambda A) = \lambda^n . \det(A)$

b) $\det(I_n) = 1$

c) $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$

d) Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

e) $\det({}^tA) = \det(A)$

MULTILINEARITE DU DETERMINANT

("linéarité" suivant chaque ligne et chaque colonne")

4

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+a'_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\phantom{a_{11}}}_{C_1+C'_1} \quad C_2 \quad C_3 \quad C_n$$

$$\det[C_1+C'_1, C_2, C_3, \ldots, C_n] = \det[C_1, C_2, \ldots C_n] + \det[C'_1, C_2, \ldots, C_n]$$

(Idem pour les colonnes $2, 3, \ldots, n$).

5

$$\det\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ \vdots & \vdots & & \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda . \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\det[\lambda C_1, C_2, C_3, \ldots C_n] = \lambda \det[C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n]$$

(Idem pour les colonnes $2, 3, \ldots, n$)

6

Propriétés analogues pour les lignes :

$$\det\begin{bmatrix} L_1+L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = \lambda \det\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

(Idem pour les lignes $2, 3, \ldots n$)

7

Attention donc :

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 \\ b_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ (addition matricielle)

Mais

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (linéarité par rapport à 1ère col. du déterminant)

$$\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mais} \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$