Densité des rationnels

June 14, 2023

1 Tout intervalle ouvert non vide $]a, b[\subset \mathbb{R}$ contient au moins un rationnel.

Preuve: Soit $]\ a, b\ [\ \subset \mathbb{R}$ un invervalle ouvert non vide. Dans ce cas, $b - a > 0$, donc, comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n_0} < b - a.$$

L'idée, c'est qu'on va "partir de 0" et avancer par pas de $\frac{1}{n_0}$ dans la direction de a: si $a > 0$,on fait le parcours

$$0 \rightsquigarrow \frac{1}{n_0} \rightsquigarrow \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} \rightsquigarrow \frac{2}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{3}{n_0}$$

Si on fait ça, puisque $\frac{1}{n_0}$ est plus petit que la largeur de l'intervalle $b - a$, on sera bien obligés, à un moment, de "tomber dans $]a, b[$"; et comme tous les points $\frac{k}{n_0}$ sont rationnels, on aura trouvé un rationnel dans $]a, b[$.

Il s'agit donc d'identifier lequel de ces points tombe dedans: ce qu'on veut, c'est un entier p tel que

$$\frac{p-1}{n_0} \leq a < \frac{p}{n_0}$$

autrement dit

$$p - 1 \leq n_0 a < p$$

Ce qu'il nous faut, c'est la fonction partie entière E. Par définition de E on a $E(n_0 a) \in \mathbb{Z}$ et

$$E(n_0 a) \leq n_0 a < E(n_0 a) + 1,$$

donc

$$n_0 a < E(n_0 a) + 1 \leq n_0 a + 1.$$

d'où

$$a < \frac{E(n_0 a) + 1}{n_0} \leq a + \frac{1}{n_0}$$

Or, d'après notre choix de n_0, $\dfrac{1}{n_0} < b - a$, donc $a + \dfrac{1}{n_0} < a + (b - a) = b$. On a donc

$$a < \frac{E(n_0 a) + 1}{n_0} \leq a + \frac{1}{n_0} < b$$

Et $\dfrac{E(n_0 a) + 1}{n_0} \in \mathbb{Q}$, donc c'est un rationnel contenu dans $]a, b[$.

2 Tout intervalle ouvert non vide $\,]\, a, b \,[\subset \mathbb{R}$ contient au moins un irrationnel.

<u>*Preuve*</u>: Soit $\,]\, a, b\, [\subset \mathbb{R}$ un invervalle ouvert non vide. On va faire la même chose qu'à l'annexe 2, mais avec un "pas" irrationnel.

Comme la suite $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)_n$ tend vers 0, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{\sqrt{2}}{n_0} < b - a.$$

Et cette fois, ce qu'on veut, c'est un entier p tel que

$$\frac{(p-1)\sqrt{2}}{n_0} \leq a < \frac{p\sqrt{2}}{n_0}$$

autrement dit

$$p - 1 \leq \frac{n_0 a}{\sqrt{2}} < p$$

On fait à nouveau appel à la fonction partie entière: par définition de E on a $E\left(\frac{n_0 a}{\sqrt{2}}\right) \in \mathbb{Z}$ et

$$E\left(\frac{n_0 a}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{n_0 a}{\sqrt{2}} < E\left(\frac{n_0 a}{\sqrt{2}}\right) + 1,$$

donc

$$\frac{n_0 a}{\sqrt{2}} < E\left(\frac{n_0 a}{\sqrt{2}}\right) + 1 \leq \frac{n_0 a}{\sqrt{2}} + 1.$$

d'où finalement

$$a < \frac{E(n_0 a) + 1}{n_0}\sqrt{2} \leq a + \frac{\sqrt{2}}{n_0}$$

Or, d'après notre choix de n_0, $\dfrac{\sqrt{2}}{n_0} < b - a$, donc $a + \dfrac{\sqrt{2}}{n_0} < a + (b - a) = b$. On a donc

$$a < \frac{E(n_0 a) + 1}{n_0}\sqrt{2} < b$$

Et $\dfrac{E(n_0 a) + 1}{n_0}\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (c'est le produit d'un irrationnel et d'un rationnel) donc c'est un rationnel contenu dans $\,]\, a, b\, [$.