Méthode: Décomposition en éléments simples

La décomposition en éléments simples est une méthode permettant de trouver une primitive de fonctions de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes. L'idée est de décomposer f en une somme de fonctions dont on connaît déjà une primitive :

- $\frac{1}{x^2+1}$ a pour primitive $\arctan(x)$;
- $\frac{P'(x)}{P(x)}$ a pour primitive $\ln(|P(x)|)$;
- $\frac{-P'(x)}{P^2(x)}$ a pour primitive $\frac{1}{P(x)}$.

Primitive de $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2+px+q}}$: On considère le polynôme $P(x) = x^2 + px + q$. Il y a trois cas possibles :

1. *Premier cas* : P a deux racines réelles a et b. Alors $P(x) = (x-a)(a-b)$ et on cherche donc un primitive de $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$. Pour cela, on cherche deux réels α et β tels que

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b};$$

or, en mettant au même dénominateur, on obtient

$$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} = \frac{(\alpha+\beta)x - (\alpha b + \beta b)}{(x-a)(x-b)}.$$

Il nous faut donc α et β tels que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha b + \beta b = -1 \end{cases} \text{ ce qui donne } \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{a-b} \\ \beta b = \dfrac{-1}{a-b} \end{cases}$$

On a donc

$$f(x) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right),$$

et une primitive de f est donc

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{a-b}(\ln(|x-a|) - \ln(|x-b|)) = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|.}$$

2. *Deuxième cas :* P a une racine double a : $P(x) = (x-a)^2$. Alors $f(x) = \frac{1}{(x-a)^2}$ et une primitive de f est donc

$$\boxed{F(x) = \frac{-1}{x-a}}$$

3. *Troisième cas :* P 2 racines complexes conjuguées $a + bi$ et $a - bi$. Alors

$$P(x) = (x-a-ib)(x-a+ib) = (x-a-ib)\overline{(x-a-ib)} = |x-a-ib|^2 = (x-a)^2 + b^2.$$

On peut alors réécrire la fonction f :

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\frac{1}{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1} = \frac{1}{b}\frac{u'(x)}{u(x)^2+1},$$

où on a posé $u(x) = \frac{x-a}{b}$. Une primitive de f est donc

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{b}\arctan(u(x)) = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).}$$

Primitive de $\mathbf{f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x+b}{x^2+px+q}}$. On a, en particulier, $Q'(x) = 2x + p$. On peut donc réécrire $f(x)$ de façon à faire apparaître $Q'(x)$ au numérateur :

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2x+2b}{x^2+px+q} = \frac{1}{2}\frac{2x+p-p+2b}{x^2+px+q} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{2b-p}{x^2+px+q}\right)$$

Or, une primitive de $\frac{2x+p}{x^2+px+q} = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$ est $\boxed{\ln|x^2+px+q|}$; on trouve une primitive de $(2b-p)\frac{1}{x^2+px+q}$ en appliquant la méthode du paragraphe précédent.

Primitive de $\mathbf{f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+px+q}}$. On réécrit f comme suit :

$$f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x^2+px+q} = \frac{x^2+px+q-px-q+ax+b}{x^2+px+q} = 1 + \frac{(a-p)x+(b-q)}{x^2+px+q}.$$

Une primitive de 1 est x ; pour traiter le deuxième terme, on se ramène à un des cas précédents :

- si $a = p$, on utilise la méthode du premier paragraphe pour trouver une primitive de
$$(b-q)\frac{1}{x^2+px+q}$$
- sinon, on utilise la méthode du deuxième paragraphe pour trouver une primitive de
$$(a-p)\frac{x+\frac{b-q}{a-p}}{x^2+px+q}$$

Exemple : Cherchons une primitive de

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+2x+2} = 3\frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+2x+2}.$$

La dérivée du polynôme x^2+2x+2 au dénominateur est $2x+2$. On réécrit donc

$$f(x) = \frac{3}{2}\frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+2} = \frac{3}{2}\frac{2x+2-\frac{2}{3}}{x^2+2x+2} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}.$$

Une primitive de $\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ est $\ln|x^2+2x+2|$. Pour l'autre terme, on étudie le polynôme x^2+2x+2. Son discriminant est $\Delta = -4$: il a deux racines complexes conjuguées $-1+i$ et $-1-i$. On a donc $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ (on peut aussi obtenir cette écriture directement). On a donc

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1},$$

dont une primitive est $\arctan(x+1)$.

Finalement, on obtient une primitive de f :

$$\boxed{F(x) = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2| - \arctan(x+1)}$$