Compacité, complétude

Suites de Cauchy : Soit $(E, \|.\|)$ un e.v.n. Une suite $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de E est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, \boxed{p, q \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|\vec{x}_p - \vec{x}_q\| < \varepsilon}.$$

Propriétés :

1. Si $(\vec{x}_k)_k$ et $(\vec{y}_k)_k$ sont deux suites de Cauchy, alors $(\vec{x}_k + \vec{y}_k)_k$ est de Cauchy.
2. Si $(\vec{x}_k)_k$ est de Cauchy et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda \vec{x}_k)_k$ est de Cauchy.
3. Si $(\vec{x}_k)_k$ est convergente, alors elle est de Cauchy.
4. Si $(\vec{x}_k)_k$ est de Cauchy, alors $(\vec{x}_k)_k$ est bornée : $\exists c > 0$ t.q. $\forall k, \|\vec{x}_k\| \leq c$.
5. Si $(\vec{x}_k)_k$ est de Cauchy, et s'il existe $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\vec{x}_{\alpha(k)})_k$ converge vers $x \in E$, alors $(\vec{x}_k)_k$ converge vers x.

⚠ Attention à ne pas confondre cette dernière propriété avec la suivante, qui est vraie pour toutes les suites : si $(\vec{x}_k)_k$ converge vers x alors toute sous-suite $(\vec{x}_{\alpha(k)})_k$ converge vers $x \in E$.

Si $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont deux normes équivalentes sur E, alors $(\vec{x}_k)_k$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|)$ ssi $(\vec{x}_k)_k$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|')$.

Une suite $(\vec{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}))_k$ de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy (pour une norme quelconque $\|.\|$) si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots n\}$, $(x_{i,k})_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Complets : On dit que $A \subset E$ est *complet* si, pour toute suite de Cauchy $(\vec{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de A, il existe $\vec{x} \in A$ tel que $\vec{x}_k \to [k \to \infty] x$.

Propriétés :

1. Si A est complet, alors A est un fermé de E.
2. Si A est complet et si $F \subset A$ est fermé, alors F est compact.

Si $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont deux normes équivalentes sur E, alors $A \subset E$ est un complet de $(E, \|.\|)$ ssi A est un complet de $(E, \|.\|')$.

Cas particuliers importants :

1. $(\mathbb{R}, |.|)$ est complet.
2. $\mathbb{R}^n$ est complet (pour une norme quelconque $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$).
3. Si E est de dimension finie, $(E, \|.\|)$ est complet.

Méthodes : Pour montrer que $A \subset E$ est complet, on peut :

- Utiliser la définition : on prend une suite de Cauchy quelconque $(\vec{x}_k)_k$ à valeurs dans A, et on montre que $(\vec{x}_k)_k$ converge.
- On montre que A est un fermé inclus dans un complet (ce qui marche notamment si E est complet)

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas complet, on peut

- Trouver une suite de Cauchy de A qui ne converge pas dans A
- Montrer que A n'est pas un fermé.

Compacts : On dit qu'une partie $A \subset E$ est un *compact* si, de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A. Autrement dit

$$\forall (\vec{x}_k)_k \in A^{\mathbb{N}},\ \exists \alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ str. croissante},$$
$$\exists \vec{x} \in A \text{ t.q } \|\vec{x}_{\alpha(k)} - \vec{x}\| \to 0.$$

Propriétés :

1. Si A est compact, alors A est complet.
2. Une union finie de compacts est compacte : Si $(K_i)_{i=1,\ldots,p}$ sont des compacts, alors $K = \cup_{i=1}^p K_i$ est compact.
3. Un produit fini de compacts est compact : Soient $(E_i, \|.\|_{E_i}$, $i = 1, \ldots, n$ des e.v.n., et pour chaque i, $K_i \subset (E_i, \|.\|_{E_i}$ un compact. Alors $K = K_1 \times \ldots \times K_n$ est un compact de $E = E_1 \times \ldots \times E_n$.
4. Si A est compact, alors A est fermé et borné.
5. Si A est fermé borné *et si E est de dimension finie*, alors A est compact.

Cette dernière propriété se démontre via :

Théorème(s) de Bolzano-Weierstrass

1. Toute suite réelle bornée admet une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$.
2. Toute suite de $\mathbb{R}^n$ bornée admet une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}^n$.
3. Si $(E, \|.\|)$ est un e.v.n. *de dimension finie*, alors toute suite bornée de E admet une sous-suite qui converge.

On a une caractérisation alternative des compacts :

Heine-Borel-Lebesgue : A est un compact de E ssi, de tout recouvrement ouvert de A, on peut extraire un sous-recouvrement fini :

$$\forall (G_i)_{i\in I} \text{ t.q. } (\forall i \in I, G_i \subset E \text{ ouvert et } K \subset \cup_{i\in I} G_i)$$
$$\exists \{i_1, \ldots, i_p\} \subset I \text{ t.q. } K \subset \cup_{k=1}^p G_{i_k}$$

ce qui équivaut à

Intersection finie : A est un compact de E ssi

$$\forall (F_i)_{i\in I} \text{ t.q. } (\forall i \in I, F_i \subset E \text{ fermé et } K \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \emptyset$$
$$\exists \{i_1, \ldots, i_p\} \subset I \text{ t.q. } K \cap (\cap_{k=1}^p F_{i_k}) = \emptyset$$

Méthodes : Pour montrer que $A \subset E$ est compact, on peut :

- Utiliser la définition : on prend une suite quelconque $(\vec{x}_k)_k$ à valeurs dans A, et on construit une sous-suite $(\vec{x}_{\alpha(k)})_k$ converge.
- Si E est de dimension finie, on montre que A est un fermé borné.
- On montre que A est une intersection finie ou un produit fini de compacts connus.

Pour montrer que $A \subset E$ n'est pas compact, on peut

- Construire une suite de A dont aucune sous-suite ne converge (par exemple, parce qu'elle part à l'infini)
- Montrer que A n'est pas borné.
- Montrer que A n'est pas un fermé.