Continuité et continuité uniforme

Soient $(X, \|.\|_X), (Y, \|.\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés, $f : A \subset X \to Y$ une fonction.

Continuité

Définition. *Soit $x_0 \in A$. On dit que f est continue en x_0 si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0, \forall x \in A, \tag{1}$$

$$\|x - x_0\|_X < \delta_{x_0,\varepsilon} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \tag{2}$$

Ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0, B(x_0, \delta_{x_0,\varepsilon}) \cap A \subset f^{-1}(B(x_0, \varepsilon)) \tag{3}$$

ou encore : Pour tout voisinage $W \subset Y$ de $f(x_0)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans A.

On dit que f est continue sur A si elle est continue en x_0 pour tout $x_0 \in A$.

Remarques :

- La notion de continuité est définie *en un point x_0 spécifique de A* : c'est ce qu'on appelle une notion "locale". Même si la fonction est continue sur A en entier, ça veut juste dire qu'on a vérifié pour chaque point de A qu'elle est continue en ce point
- Pour chaque $\varepsilon > 0$, on obtient un $\delta > 0$ qui dépend de ε, *mais aussi de x_0* (voir l'exemple ci-dessous)

Exemple Montrons que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, on cherche $\delta_{x_0,\varepsilon} > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \delta_{x_0,\varepsilon} \Rightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$

Or,

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon \iff x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon$$

Donc, pour avoir

- $x^2 > x_0^2 - \varepsilon$, on peut prendre $x > \sqrt{|x_0^2 - \varepsilon|}$ donc $x - x_0 > \sqrt{|x_0^2 - \varepsilon|} - x_0$, et on a ça si $|x - x_0| < x_0 - \sqrt{|x_0^2 - \varepsilon|}$.
- $x^2 < x_0^2 + \varepsilon$, on peut prendre $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$.

Pour avoir les deux à la fois, on prend donc

$$\delta_{x_0,\varepsilon} = \min(x_0 - \sqrt{|x_0^2 - \varepsilon|}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0)$$

$\rightsquigarrow$ Ca dépend de x_0 : plus x_0 est grand, plus il nous faut un petit $\delta_{x_0,\varepsilon}$:

$$\delta_{x_0,\varepsilon} \sim_{x_0 \to \infty} \frac{\varepsilon}{2x_0}.$$

Proposition (Caractérisation séquentielle)**.** *f est continue en x_0 ssi, pour toute suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x_0$, la suite $(f(x_n)) \in Y^{\mathbb{N}}$ converge vers $f(x_0)$:*

$$\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).$$

Continuité uniforme

Définition. *f est uniformément continue sur A ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{x_0,\varepsilon} > 0, \forall x_1, x_2 \in A,$$
$$\|x_1 - x_2\|_X < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y < \varepsilon$$

Proposition. *Une fonction uniformément continue sur A est continue sur A.*

Remarques :

- La notion de continuité est définie *sur A entier* : c'est ce qu'on appelle une notion "globale". Une fonction ne peut pas être uniforméménet continue en un seul point de A (bon, ok, sauf si A est un singleton)
- Pour chaque $\varepsilon > 0$, on obtient un $\delta > 0$ qui dépend de ε uniquement : le même δ_ε marche pour tous les $x_1, x_2 \in A$.

Exemple Montrons que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

$\rightsquigarrow$ Soit $\varepsilon > 0$, pour que f soit uniformément continue, il faudrait qu'on trouve $\delta_\varepsilon > 0$ tel que

$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$$

Or, pour $\delta > 0$ quelconque, si $|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon$ alors

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| < \delta|x_1 + x_2|$$

$\rightsquigarrow$ si $|x_1 + x_2|$ est très grand, ça va être compliqué de garantir que $\delta|x_1 + x_2|$ est $< \varepsilon$ sans toucher à δ.

Prenons $\varepsilon = 1$, alors pour tout $\delta > 0$, si on prend $x_1 = \frac{1}{\delta}$ et $x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ alors

$$|x_1 - x_2| = \left|\frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

mais

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$$

Donc on a montré que

$$\exists \varepsilon = 1 > 0 \text{ t.q. } \forall \delta > 0, \exists x_1 = \frac{1}{\delta}, x_2 = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2} \in \mathbb{R} \text{ t.q.}$$
$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ et } |f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon$$

ce qui est la négation de la définition.

$\rightsquigarrow$ Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Caractérisation séquentielle)**.** *f est uniformément continue sur A ssi pour toute suites $(u_n)_n, (v_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ telles que $\|u_n - v_n\|_X \to 0$, on a $\|f(u_n) - f(v_n)\| \to 0$:*

$$\forall (u_n)_n, (v_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \|u_n - v_n\|_X \to 0 \Rightarrow \|f(u_n) - f(v_n)\| \to 0.$$

Exemple : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et $(x_n)_n$ une suite qui tend vers x_0.

Alors $x_n^2 \to x_0^2$, donc $f : x \mapsto x^2$ est continue en x_0.

On le sait, mais montrons-le quand même : Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geq N$, $|x_n^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Or

$$|x_n^2 - x_0^2| = |x_n - x_0||x_n + x_0| \leq |x_n - x_0|(|x_n| + |x_0|)$$

et $(x_n)_n$ est convergente, donc bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout n, $|x_n| < M$.

De plus, $x_n \to x_0$ donc il existe $N'_{\frac{\varepsilon}{M+|x_0|}} \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N'_{\frac{\varepsilon}{M+|x_0|}}$,

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{M + |x_0|}$$

mais alors pour tout $n \geq N'_{\frac{\varepsilon}{M+|x_0|}}$,

$$|x_n^2 - x_0^2| \leq |x_n - x_0|(|x_n| + |x_0|) < \frac{\varepsilon}{M + |x_0|}(M + |x_0|) = \varepsilon,$$

$\rightsquigarrow$ On peut donc prendre $N_\varepsilon = N'_{\frac{\varepsilon}{M+|x_0|}}$, et on a gagné.

Un autre contre-exemple : $g : x \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ est continue sur $]0, 1]$.

Soit $x_0 \in]0, 1], \varepsilon > 0$, on cherche $\delta_{x_0,\varepsilon}$ tel que pour tout $x \in]0, 1]$,

$$|x - x_0| < \delta_{x_0,\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

Or,

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x_0 - x|}{x x_0}$$

donc si on a une majoration du genre $|x - x_0| < \delta$, mettons avec $\delta < x_0$ quitte à en prendre un plus petit, on trouve

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}$$

Or $\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)} = \varepsilon \iff \delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{\varepsilon x_0 + 1}$.

Donc si on prend $\delta_{x_0,\varepsilon} = \frac{\varepsilon x_0^2}{\varepsilon x_0 + 1}$, on obtient bien

$$|x - x_0| < \delta_{x_0,\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

Exemple : Montrons que $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue. Il faut donc qu'on trouve deux suites réelles $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $|u_n - v_n| \to 0$ mais $|u_n^2 - v_n^2| \nrightarrow 0$.

Prenons par exemple, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n^2 + \frac{1}{n}, v_n = n^2 - \frac{1}{n}$ (on n'a pas dit que (u_n) et (v_n) doivent être convergentes !).

Alors
$$|u_n - v_n| = \frac{2}{n} \to 0$$

mais

$$|u_n^2 - v_n^2| = |u_n - v_n||u_n + v_n| = \frac{2}{n}(2n^2) = 4n \nrightarrow 0$$

donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Un autre contre-exemple : $g : x \in]0, 1] \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Essayons de montrer qu'elle l'est, pour voir où ça plante. Soit $\varepsilon > 0$, peut-on trouver un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in]0, 1]$,

$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon.$$

Or si on a une majoration du type $|x_1 - x_2| < \delta$, on calcule

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_2 x_1} < \frac{\delta}{x_1 x_2}$$

$\rightsquigarrow$ Si x_1, x_2 sont très proche de zéro, ce truc-là aura du mal à être plus petit de ε.

$\rightsquigarrow$ Pour montrer que f n'est pas uniformément continue, on veut montrer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, quel que soit $\delta > 0$, on peut trouver deux points $x_1, x_2 \in]0, 1]$ tels que

$$|x_1 - x_2| < \delta \text{ mais } |g(x_1) - g(x_2)| > \varepsilon$$

$\rightsquigarrow$ on va prendre deux points proches de 0 pour trouver un contre-exemple.

Prenons $\varepsilon = 1$, et soit $\delta > 0$.
- Si $\delta < 1$, on pose $x_1 = \delta, x_2 = \frac{\delta}{2}$ et on a alors

$$|x_1 - x_2| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ mais } |g(x_1) - g(x_2)| = \frac{1}{\delta} > \varepsilon$$

- Si $\delta \geq 1$, on prend $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$.

$\rightsquigarrow$ f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Avec les suites : On peut aussi montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_n, (v_n)_n \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$ telles que $|u_n - v_n| \to 0$ mais $|g(u_n) - g(v_n)| \nrightarrow 0$.

$\rightsquigarrow$ Puisque le problème se pose quand on est près de 0, on prend des suites qui tendent vers 0.

Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^2}, v_n = \frac{1}{2n^2}$. Alors $(u_n)_n, (v_n)_n \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$

$$|u_n - v_n| = \frac{1}{2n^2} \to 0 \text{ mais } |g(u_n) - g(v_n)| = n^2 \nrightarrow 0$$

donc f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

Reprenons nos contre-exemples $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ et $g : x \in]0,1] \mapsto \frac{1}{x}$. On a vu que les deux étaient continues, mais pas uniformément continues, sur leur ensemble de définition.

f est uniformément continue sur $[2,167]$: Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in [2,167]$,

$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Comme précédemment, on a pour tous $x_1, x_2 \in [2,167]$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 - x_2||x_1 + x_2| \leq |x_1 - x_2|(|x_1| + |x_2|)$$

Or x_1, x_2 ne sont pas des réels quelconques : ils sont dans $[2,167]$, donc $|x_1| \leq 167, |x_2| \leq 167$, donc

$$(\star) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq 334|x_1 - x_2|$$

Mais du coup, si $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{334}$, on aura $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

On prend $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{334}$, et on a bien

$$\forall x_1, x_2 \in [2,167], |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

donc f est uniformément continue sur $[2,167]$.

g est uniformément continue sur $[1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$: Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tous $x_1, x_2 \in [1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$,

$$|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$$

Comme précédemment, on a pour tous $x_1, x_2 \in [1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$,

$$|g(x_1) - g(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2}$$

Or x_1, x_2 ne sont pas des réels quelconques : ils sont dans $[1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$, donc $|x_1 x_2| \geq (1.616 \cdot 10^{-35})^2 = 2.611 \cdot 10^{-70}$, donc $\frac{1}{x_1 x_2} \leq 0.382 \cdot 10^{70}$, ce qui donne

$$(\star\star) \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq (0.382 \cdot 10^{70})|x_1 - x_2|$$

Mais du coup, si $|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{0.382 \cdot 10^{70}}$, on aura $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.

On prend $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{0.382 \cdot 10^{70}}$, et on a bien

$$\forall x_1, x_2 \in [1.616 \cdot 10^{-35}, 1], |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$$

donc g est uniformément continue sur $[1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$.

Remarque : Dans les deux cas, en restreignant l'ensemble de départ, on arrive à obtenir une inégalité du type

$$\forall x_1, x_2 \in A, |f(x_1) - f(x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$$

où C est une constante positive, et on a ensuite pris $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{C}$.

$\rightsquigarrow$ Ce même raisonnement se généralise : rappelons la définition suivante :

Définition. *Soit $f : A \subset X \to Y$ une fonction entre deux e.v.n X et Y. On dit que f est lipschitzienne s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x_1, x_2 \in A$,*

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq C\|x_1 - x_2\|_X$$

Proposition. *Si $f : A \subset X \to Y$ est lipschitzienne, alors elle est uniformément continue sur A.*

Preuve : Exercice !

Contre-exemple : La réciproque est fausse : il existe des fonctions uniformément continues qui ne sont pas lipschitziennes.

Par exemple, posons $h : x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$. Alors

- h est uniformément continue sur $[0,1]$.

  Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, alors pour tous $x, y \in [0,1]$ tels que $|x-y| < \varepsilon^2$, on a

  – Si $x, y < \varepsilon^2$ alors $0 \leq \sqrt{x}, \sqrt{y} < \varepsilon$ donc $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$;

  – Sinon, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \varepsilon$ et

  $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} < \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon$$

  $\rightsquigarrow$ Dans tous les cas $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \varepsilon$.

  donc, si on pose $\delta_\varepsilon = \varepsilon^2$ on a bien pour tous $x, y \in [0,1]$,

  $$|x-y| < \delta_\varepsilon \to |h(x) - h(y)| < \varepsilon,$$

  donc h est uniformément continue sur $[0,1]$.

- h n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

  Preuve : Supposons, par l'absurde, que h est lipschitzienne, alors il existe $C > 0$ tq, pour tous $x, y \in [0,1]$,

  $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq C|x-y|$$

  en particulier pour $y = 0$, on a, pour tout $x \in]0,1]$,

  $$\sqrt{x} \leq Cx \iff \frac{1}{\sqrt{x}} \leq C$$

  or la fonction $x \in]0,1] \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas bornée. Contradiction.

  $\rightsquigarrow$ h est uniformément continue, mais pas lipschitzienne, sur $[0,1]$.

Revenons encore à nos contre-exemples f et g, restreints à $[2, 167]$ et $[1.616 \cdot 10^{-35}, 1]$ respectivement.

- Dans le cas de f, ça marche parce que x_1, x_2 ne peuvent pas être arbitrairement grands : on s'est restreint à un borné, donc nos contre-exemples précédents ne fonctionnent pas.
- Dans le cas de g, ça marche parce que x_1, x_2 ne peuvent pas être trop proche de 0, donc nos contre-exemples précédents ne fonctionnent pas. Par exemple, les suites $(u_n = \frac{1}{n^2})_n, (v_n = \frac{1}{2n^2})_n$ ne sont pas dans $[1.616 \cdot 10^{-35}, 1]^{\mathbb{N}}$. On ne risque pas d'avoir de problème en passant à la limite, puisque cet ensemble est fermé.

$\rightsquigarrow$ Dans un cas, on s'en est sortis en changeant notre ensemble de départ pour qu'il soit *borné* et dans le deuxième cas, en se ramenant à un ensemble *fermé*.

$\rightsquigarrow$ Pour une fonction continue quelconque sur un ensemble fermé borné, est-ce que ça peut quand même mal se passer ?

Non, pas en dimension finie ! C'est ce que dit le théorème suivant :

Théorème (Heine)**.** *Soient X, Y deux e.v.n., $K \subset X$ un compact et $f : K \to Y$ une fonction continue sur K. Alors f est uniformément continue sur K.*

Preuve : Montrons que f est uniformément continue sur K. Pour cela, on pose donc $\varepsilon > 0$ et on chercher $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $x_1, x_2 \in K$,

$$\|x_1 - x_2\|_X < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y < \varepsilon$$

On sait que f est continue sur K, donc d'après (3) pour tout $x_0 \in K$, pour tout $\alpha > 0$, il existe $\beta_{\alpha,x_0} > 0$ tel que

$$B(x_0, \beta_{x_0,\alpha}) \cap K \subset f^{-1}(B(x_0, \alpha)) \tag{4}$$

$\rightsquigarrow$ On a alors [1]

$$K \subset \bigcup_{x_0 \in K} B(x_0, \frac{1}{2}\beta_{x_0,\alpha})$$

c'est un recouvrement du compact K par des ouverts, donc d'après Heine-Borel-Lebesgue, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : autrement dit, il existe $z_1, \ldots, z_n \in K$ tels que

$$K \subset B(z_1, \beta_{z_1,\alpha}) \cup \ldots \cup B(z_n, \beta_{z_n,\alpha})$$

Mais alors, si on prend $x_1, x_2 \in K$, il existe $i_0 = 1, \ldots, n$ tel que $x_1 \in B(z_{i_0}, \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha})$, et on a alors

$$x_1 \in K \cap B(z_{i_0}, \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}) \subset K \cap B(z_{i_0}, \beta_{z_{i_0},\alpha}) \subset f^{-1}(B(f(z_{i_0}), \alpha))$$

donc

$$f(x_1) \in B(f(z_{i_0}), \alpha) \text{ i.e. } \|f(x_1) - f(z_{i_0})\|_Y < \alpha$$

C'est le moment de se rappeler de l'objectif : on veut s'arranger pour que, si x_2 est assez proche de x_1, alors $f(x_2)$ sera proche de $f(x_1)$ (à une distance $< \varepsilon$).

Ce qu'on vient d'obtenir, c'est que $f(x_1)$ est proche de $f(z_{i_0})$, donc, si $f(x_2)$ est proche de $f(z_{i_0})$ aussi, et qu'on choisit correctement α, on devrait s'en sortir.

Or, si on prend x_2 tel que $\|x_1 - x_2\|_X < \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}$, alors on aura

$$\|x_2 - z_{i_0}\|_X \leq \|x_2 - x_1\|_X + \|x_1 - z_{i_0}\|_X < \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha} + \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha} = \beta_{z_{i_0},\alpha}$$

donc

$$x_2 \in K \cap B(z_{i_0}, \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}) \subset K \cap B(z_{i_0}, \beta_{z_{i_0},\alpha}) \subset f^{-1}(B(f(z_{i_0}), \alpha))$$

ce qui nous dit que

$$f(x_2) \in B(f(z_{i_0}), \alpha) \text{ i.e. } \|f(x_2) - f(z_{i_0})\|_Y < \alpha$$

mais du coup

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq \|f(x_1) - f(z_{i_0})\|_Y + \|f(z_{i_0}) - f(x_2)\|_Y < 2\alpha$$

On a donc obtenu que si $x_1 \in B(z_{i_0}, \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha})$ alors

$$\|x_1 - x_2\|_X < \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha} \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\|_Y < 2\alpha$$

Et cela vient de (4), qui est vrai pour tout $\alpha > 0$, donc on peut choisir α.

$\rightsquigarrow$ Il semble donc qu'il suffise de faire le raisonnement qu'on a fait ci-dessus avec $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

1. On verra plus tard pourquoi on doit prendre un rayon de $\frac{1}{2}\beta_{x_0,\alpha}$ au lieu de juste $\beta_{x_0,\alpha}$.

Qui est alors le δ_ε qu'on cherche depuis le début ? On serait tenté de dire qu'on peut prendre $\delta_\varepsilon = \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}$, mais c'est un piège !

En effet $\frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}$ dépend de i_0, et i_0 dépend de x_1 (c'est l'indice de la boule du recouvrement à laquelle x_1 appartient). Donc ça ne convient pas : il nous faut un δ_ε qui marche pour tous les x_1, x_2 !

Pour avoir ça, on prend $\delta_\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n}(\frac{1}{2}\beta_{z_i,\alpha})$. Alors $\delta_\varepsilon > 0$ puisque c'est le minimum d'un ensemble *fini* de réels > 0.

Et surtout, pour tous $x_1, x_2 \in K$, si $\|x_1 - x_2\|_X < \delta_\varepsilon$, on a

1. Il existe $i_0 = 1, ...n$ tel que
$$x_1 \in K \cap B(z_{i_0}, \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha}) \subset B(z_{i_0}, \beta_{z_{i_0},\alpha})$$
2. Mais du coup, par (4), $\|f(x_1) - f(z_{i_0})\|_Y < \alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.
3. Par ailleurs, on a
$$\|x_2 - x_1\|_X < \delta_\varepsilon = \min_{i=1,\ldots,n}(\frac{1}{2}\beta_{z_i,\alpha}) \leq \frac{1}{2}\beta_{z_{i_0},\alpha} \text{ donc } \|x_2 - z_{i_0}\|_X \leq \|x_2 - x_1\|_X + \|x_1 - z_{i_0}\|_X < \beta_{z_{i_0},\alpha}$$
autrement dit $x_2 \in B(z_{i_0}, \beta_{z_{i_0},\alpha})$. Mais du coup par (4)
$$\|f(x_2) - f(z_{i_0})\|_Y < \alpha = \frac{\varepsilon}{2}$$
4. On a au final
$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq \|f(x_1) - f(z_{i_0})\|_Y + \|f(z_{i_0}) - f(x_2)\|_Y < 2\alpha = \varepsilon$$

$\rightsquigarrow$ On a trouvé le δ_ε qu'il nous faut ! On peut conclure que f est uniformément continue sur K.

$\square$