Continuité dans les espaces vectoriels normés - Méthodes

Continuité d'une application entre evn : Soit E, F deux e.v.n. $\mathbb{R}$. Une application $f : X \subset E \to F$ est une *continue* en $x_0 \in X$ ssi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $B_X(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B_F(f(x_0), \varepsilon))$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon;$$

c'est la définition habituelle, reformulée en termes de boules.
Caractérisation par les suites : f est continue en x_0 ssi, pour toute suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$,

$$x_n \to x_0 \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x_0)$$

Ainsi, pour montrer qu'une fonction f n'est *pas* continue en x_0, on peut chercher une suite (x_n) telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Fonctions continues et topologie : Soit $f : X \subset E \to F$ une fonction entre deux e.v.n. Alors :

- f est continue sur X ssi pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de F, $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X ;
- f est continue sur X ssi pour tout fermé $\mathcal{F}$ de F, $f^{-1}(\mathcal{F})$ est un fermé de X ;

Ainsi, pour montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un ouvert (resp. un fermé), on peut essayer de l'écrire comme image réciproque d'un ouvert (resp. un fermé) par une application continue.
Exemple :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^5 \leq 1\} = f^{-1}(]-\infty, 1]),$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'application continue $f(x, y) = x^2 + y^5$. C'est donc un fermé de $\mathbb{R}^2$.

On a aussi, pour $f : K \subset E \to F$,

$$\boxed{\begin{cases} f \text{ continue} \\ K \text{ compact} \end{cases} \Rightarrow f(K) \text{ compact}}$$

Application : Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, $f(K)$ est alors un fermé borné de $\mathbb{R}$. En particulier, f est *bornée* sur K et *atteint ses bornes* : il existe $x_{\min}, x_{\max} \in K$ tels que

$$\forall x \in K, f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

Fonctions Lipschitziennes : Une fonction $f : X \subset E \to F$ est *lipschitzienne* s'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X^2, \|f(x) - f(y)\|_E \leq c\|x - y\|_E.$$

Toute application lipschitzienne est continue.
Si $c < 1$, on dit que f est *contractante*.

Applications linéaires continues : Soit $f : E \to F$ une application *linéaire*. Alors f est continue ssi il existe $c > 0$ tel que

$$\boxed{\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E.}$$

Méthodes :

- Pour montrer qu'une application linéaire est continue, on cherche à majorer $\|f(x)\|_F$ en fonction de $\|x\|_E$.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est *pas* continue, on peut chercher une suite $(u_n)_n$ de $E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|f(u_n)\| \to \infty$.

De plus, si E est de dimension finie, toute application linéaire $E \to F$ est continue (même si F est de dimension infinie !)

L'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$: On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires CONTINUES $E \to F$. On le munit d'une norme en posant, pour $F \in \mathcal{L}(E, F)$:

$$\boxed{\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.}$$

Pour montrer qu'une application linéaire f est continue et calculer sa norme, on procède en deux étapes :

1. On montre qu'il existe $c > 0$ telle que $\forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$. On en déduit que f est continue et que $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq c$.
2. On montre que $\|f\|_F \geq c$: pour cela, on cherche $x \in E$ tel que $\|x\|_E = 1$ et $\|f(x)\|_F = c$.
   Si on ne trouve pas de tel x, on cherche une suite x_n telle que $\|x_n\| = 1$ et $\|f(x_n)\| \geq c - \frac{1}{n}$. On a alors $\|f\|_F \geq c - \frac{1}{n}$ pour tout n, donc $\|f\|_F \geq c$.

Propriétés :

- $\|Id_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$
- $\|f \circ g\| \leq \|f\|\,\|g\|$. En particulier, $\|f^n\| \leq \|f\|^n$.
- Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet.

Séries d'applications linéaires : Si $\mathcal{L}(E, F)$ est complet, alors, pour toute suite (f_n) de $\mathcal{L}(E, F)$,

$$\boxed{\sum_n \|f_n\| \text{ converge} \Rightarrow \sum_n f_n \text{ converge dans } \mathcal{L}(E, F)}$$

Par exemple,

- *Exponentielle :* Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\sum \frac{f^n}{n!}$ converge. On note cette application linéaire $\exp(f)$.
- *Séries "géométriques" :* Si $\|f\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$, la série $\sum f^n$ converge et sa somme est $(Id_E - f)^{-1}$.