Le théorème du point fixe de Picard

Théorème. *Soit* $(E, \|.\|)$ *un eespace vectoriel normé complet et* $F \subset E$ *un fermé. Soit* $f : F \to F$ *une application contractante, i.e. telle que*

$$\exists\, k \in]0,1[,\ \forall\, x, y \in F, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

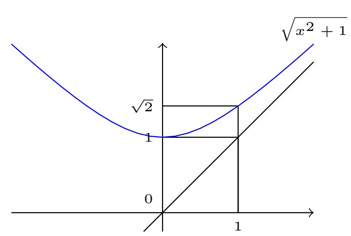
Alors f *admet un unique point fixe* $\overline{x} \in F$.

De plus, pour tout $x_0 \in F$, *la suite définie à partir de* x_0 *par* $x_{n+1} = f(x_n)$ *converge vers* $\overline{x}$, *avec*

$$\|x_n - \overline{x}\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Pour obtenir un unique point fixe, il y a donc trois hypothèses à vérifier : F fermé, $f(F) \subset F$ et f contractante. Chacune de ces hypothèses est indispensable, comme l'illustrent les contre-exemples suivants :

- $F =]0,1[\subset \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, alors $f : F \to F$ est contractante, mais n'a pas de point fixe *dans* F.
- $F = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $f : x \in F \mapsto \sqrt{1+x^2} \in [1, \sqrt{2}] \not\subset F$
  $\rightsquigarrow$ F fermé, f contractante car $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sur F, mais sans point fixe.
- $E = F = \mathbb{R}$, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{1+x^2} \in \mathbb{R}$ **n'est pas contractante**, même si on a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$.
- $E = \mathbb{R}, F = [0, \frac{\pi}{2}]$, $f : x \in F \mapsto \sin(x) \in F$ **n'est pas contractante**, même si on a pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$. Ici, f a un unique point fixe, mais la suite $x_{n+1} = \sin(x_n)$ converge lentement.
- E Banach quelconque, $f = \mathrm{Id}_E$ **n'est pas contractante**, et on perd l'unicité du point fixe.



Preuve : On commence par s'échauffer en démontrant l'unicité. Ensuite, on passe à l'existence.
▷ *Unicité :* Supposons que f admette deux points fixes $\bar{x}$ et $\bar{y}$. Alors $f(\bar{x}) = \bar{x}$ et $f(\bar{y}) = \bar{y}$.
Or, f est contractante, donc il existe $k \in]0,1[$ tel que

$$\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\| \leq k\|\bar{x} - \bar{y}\|$$

autrement dit $\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq k\|\bar{x} - \bar{y}\|$, donc, puisque $k < 1$,

$$0 \leq (1-k)\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq 0,$$

donc, nécessairement, $\|\bar{x}-\bar{y}\|=0$, ce qui implique $\bar{x}=\bar{y}$.

$\triangleright$ *Existence :* Puisque l'énoncé nous donne une suite censée converger vers le point fixe recherché, utilisons-la. On choisit donc un point de départ quelconque $x_0 \in F$ et on considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_{n+1}=f(x_n)$. Il s'agit maintenant de montrer que $(x_n)_n$ converge, et que sa limite est bien un point fixe de f.

Or, $f(F) \subset F$, donc, puisque $x_0 \in F$, $x_1=f(x_0) \in F$, donc $x_2=f(x_1) \in F$....et par réccurence, $x_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or derechef, F est un fermé dans l'espace complet E, donc F est complet : il suffit donc de montrer que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy.

Soit donc $\varepsilon>0$. Puisque f est contractante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|x_{n+1}-x_n\|=\|f(x_n)-f(x_{n-1})\| \leq k\|x_n-x_{n-1}\|.$$

Par récurrence, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|.$$

En utilisant ceci, on obtient, pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+p}-x_n\| &= \|x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}+\ldots+x_{n+1}-x_n\| \\
&\leq \|x_{n+p}-x_{n+p-1}\|+\ldots+\|x_{n+1}-x_n\| = \sum_{i=n}^{n+p-1}\|x_{i+1}-x_i\| \\
&\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i\|x_1-x_0\| = \|x_1-x_0\| \sum_{i=n}^{n+p-1} k^i \\
&= \|x_1-x_0\| k^n \sum_{j=0}^{p-1} k^j = k^n \frac{1-k^p}{1-k}\|x_1-x_0\| \\
&\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|
\end{aligned}$$

Or $k \in]0,1[$ donc $\frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{k^n}{1-k}\|x_1-x_0\|<\varepsilon$$

donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq n_0$, $\|x_{n+p}-x_n\|<\varepsilon$. Autrement dit, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans le complet F : il existe donc $\bar{x} \in F$ tel que $x_n \to \bar{x}$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que $\bar{x}$ est un point fixe de f. Or f est contractante, donc continue. Donc $f(x_n) \to f(\bar{x})$. En passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1}=f(x_n)$, on obtient bien $f(\bar{x})=\bar{x}$.

$\square$

Le théorème du point fixe permet de résoudre beaucoup plus de problèmes qu'il n'en a l'air. En fait, de nombreuses équations peuvent se ramener à un problème de point fixe. De manière très générale, pour $y \in E$, résoudre $f(x)=y$ revient à résoudre $f(x)+x-y=x$, autrement dit à chercher les points fixes de la fonction $h_y : x \mapsto f(x)+x-y$. Cette idée, convenablement adaptée aux circonstances, est à la base de la démonstration de théorèmes majeurs :

- le théorème d'inversion locale, qui dit qu'une fonction dont la différentielle en x_0 est inversible réalise un difféomorphisme au voisinage de x_0 :
- le théorème des fonctions implicites, qui permet de décrire l'ensemble des solutions d'un système d'équations
$$\begin{cases} f_1(u_1,\ldots,u_n)=0 \\ \vdots \\ f_p(u_1,\ldots,u_n)=0 \end{cases}$$
où $n>p$ et où les fonctions f_i sont différentiables (ce qui généralise les systèmes linéaires)

- le théorème de Cauchy-Lipschitz, qui affirme que l'équation différentielle d'inconnue $x(t)$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution pourvu que f soit (localement) lipschitzienne en sa deuxième varbiable :

$$\forall\ (t, x_1), (t, x_2),\ \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|$$