Espaces euclidiens - Définitions et méthodes

Formes bilinéaires : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est forme bilinéaire si elle vérifie

- Pour tout $u_0 \in E$, $u' \in E \mapsto \varphi(u_0, u') \in \mathbb{R}$ est linéaire ;
- Pour tout $u'_0 \in E$, $u \in E \mapsto \varphi(u, u'_0) \in \mathbb{R}$ est linéaire.

On dit de qu'une forme bilinéaire φ est symétrique si, pour tout $(u, u') \in E \times E$, $\varphi(u', u) = \varphi(u, u)$.

L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel, et le sous-ensemble des formes symétriques est un s.e.v.

Matrice d'une forme bilinéaire : Supposons $\dim E < \infty$. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Soient $u, u' \in E$, notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X = (x'_1, \dots x'_n)$ les coordonnées de u et u' dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$\varphi(u, u') = \sum_{i,j} x_i x'_j \varphi(e_i, e_j)$$

La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$\boxed{A = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{1 \le i,j \le n}}$$

ce qui donne $\boxed{\forall u, u' \in E,\ \varphi(u, u') = {}^t XAY}$.

$\rightsquigarrow$ φ est symétrique ssi A est symétrique.

Changement de base : Soit $\mathcal{B}'$ une autre base sur E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et A' la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a

$$A' = {}^t PAP$$

Montrer qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est bilinéaire

1. *Méthode 1 : Définition* On procède en deux étapes :
   - On fixe $u'_0 \in E$ et on montre que $u \mapsto \varphi(u, u'_0)$ est linéaire : pour $u, v \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ on montre que
   $$\varphi(u + \lambda v, u'_0) = \varphi(u, u'_0) + \lambda \varphi(v, u'_0)$$
   - Ensuite, on fixe $u_0 \in E$ et on montre que $u' \mapsto \varphi(u_0, u')$ est linéaire : pour $u', v' \in E, \lambda \in \mathbb{R}$ on montre que
   $$\varphi(u_0, u' + \lambda v') = \varphi(u_0, u') + \lambda \varphi(u_0, v')$$
2. *Méthode 2 (Symétrie)* On commence par montrer que, pour tous $u, u' \in E$, $\varphi(u, u') = \varphi(u', u)$, puis on fait l'étape 1 de la méthode 1. Par symétrie, on n'a alos pas besoin de vérifier l'étape 2.
3. *Méthode 3 (Matrice)* Si $E = \mathbb{R}^n$, on trouve une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que,
   pour tous $u = (x_1, \dots, x_n), u' = (x'_1, \dots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$,
   $$\varphi(u, u') = (x_1 \dots, x_n) A \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Montrer qu'une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ n'est pas bilinéaire

$\rightsquigarrow$ On trouve u_0 tel que $\varphi(u_0, 0_E) \neq 0$ (idem avec un u'_0)

$\rightsquigarrow$ On trouve $u_0 \in E$ tel que $u' \mapsto \varphi(u_0, u')$ n'est pas linéaire : si c'est un polynôme, par exemple. (Idem en fixant un u'_0)

$\rightsquigarrow$ Dans $\mathbb{R}^n$: on calcule la matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$, et on montre qu'il y a $u, u' \in \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(u, u') \neq {}^t uAu'$

Vocabulaire : On dit qu'une forme bilinéaire symétrique est

- positive si pour tout $u \in E, \varphi(u, u) \ge 0$
- négative si pour tout $u \in E, \varphi(u, u) \le 0$
- définie si pour tout $u \in E, \varphi(u, u) = 0 \iff u = 0_E$.
- non dégénérée si pour tout $u_0 \in E$,
  $(v \mapsto \varphi(u_0, v)) = 0_{E^*} \iff u_0 = 0_E$.

Un produit scalaire sur E est une forme *bilinéaire symétrique définie positive.*

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$ est appelé espace euclidien (ou préhilbertien).

Méthode : Produit scalaire ou pas ?

Il y a plusieurs points à vérifier :

- Bilinéaire : voir ci-dessus

- Symétrique 1. On calcule que
$$\forall u, u' \in E, \varphi(u', u) = \varphi(u, u').$$
2. On calcule la matrice de A dans une base quelconque et on montre que ${}^t A = A$.

- Pas symétrique Si ${}^t A \neq A$, φ n'est pas un symétrique.

- Positive On calcule $\varphi(u, u)$ et on utilise des *identités remarquables*, pour avoir une somme de carrés
$$\varphi(u, u) = \ell_1(u)^2 + \ldots + \ell_p(u)^2 \ge 0$$

- Pas positive 1. Si, en faisant ça, on a des "-" :
$$\varphi(u, u) = \ell_1(u)^2 + \ldots + \ell_k(u)^2 - \ell_{k+1}(u)^2 - \ldots - \ell_p(u)^2$$
on cherche $u_0 \in E$ tel que
$$\ell_1(u_0) = \ldots = \ell_k(u_0) = 0, \ell_p(u_0) = 1 \rightsquigarrow \varphi(u_0, u_0) < 0$$
2. S'il y a un terme < 0 sur la diagonale de A, cela correspond à un vecteur e_i de la base $\mathcal{B}$ tel que $\varphi(e_i, e_i) < 0$.

- Définie On suppose que $\varphi(u, u) = 0$, et on cherche à en déduire que $u = 0_E$.
$\rightsquigarrow$ Si on a écrit $\varphi(u, u)$ comme somme de carrés, $\varphi(u, u) = 0$ donne $\ell_1(u) = \ldots. = \ell_p(u) = 0$: souvent, c'est un système linéaire homogène. Si ce système a $u = 0_E$ comme unique solution, φ est définie.

- Pas définie 1. En résolvant le système linéaire ci-dessus, on trouve une solution $u_0 \neq 0_E$ qui donne $\varphi(u_0, u_0) = 0$.
2. S'il y a un terme $= 0$ sur la diagonale de A, cela correspond à un vecteur e_i de la base $\mathcal{B}$ tel que $\varphi(e_i, e_i) = 0$.

⚠ S'il n'y a que des termes > 0 sur la diagonale de A, ça ne suffit pas pour que φ soit définie positive !

Exemples classiques : Soient $\ell, \ell' \in E^*$ deux formes linéaires. Alors $\varphi : (u, u') \in E \times E \mapsto \ell(u)\ell'(u')$ est une forme bilinéaire sur E.

$\rightsquigarrow$ Si $\ell = \ell'$, la forme bilinéaire est symétrique.

$\rightsquigarrow$ Soient $\ell_1, \dots, \ell_k \in E^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, alors
$$\varphi(u, u') = \alpha_1 \ell_1(u) \ell_1(u') + \ldots \alpha_k \ell_k(u) \ell_k(u')$$
est bilinéaire, et c'est un p.s. si tous les $\alpha_i > 0$ et $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est une base de E^*.

Les exemples suivants sont des produits scalaires sur E :

- $E = \mathbb{R}^n$, $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$.
- $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t AB)$.
- $E = C^0([a, b])$, $\varphi : (f, g) \in C^0([a, b])^2 \mapsto \int_a^b f(t) g(t) dt$.
- L'exemple précédent donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Norme sur un espace euclidien : Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Alors $\|.\| : u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle} \in \mathbb{R}$ est une norme sur E, autrement dit :

1. $\|u\| = 0$ si, et seulement si, $u = 0_E$;
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, u \in E$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. Pour tous $(u, v) \in E^2$, $\|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$

$\rightsquigarrow$ Un espace euclidien est en particulier un e.v.n.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tous $(u, v) \in E^2$,

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Orthogonalité : Soit $(E, \langle ., .\rangle)$ un espace euclidien.

- On dit que $u, v \in E$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$.
- *Théorème de Pythagore :* Si u et v sont orthogonaux,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

- Soit $A \subset E$, on définit l'orthogonal de A par

$$A^\perp = \{v \in E, \forall u \in A, \langle u, v\rangle = 0\}$$

⚠ A n'est pas forcément un s.e.v. ; en revanche, $A^\perp$ est un s.e.v fermé de E (même si A n'en est pas un).

- Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$.

Méthode : Déterminer $F^\perp$

$\rightsquigarrow$ Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de F. On a, pour tout $u \in E$,

$$\begin{aligned} u \in F^\perp &\iff \forall v \in F, \langle u, v\rangle = 0 \\ &\iff \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \langle u, \sum_i \lambda_i v_i\rangle = 0 \\ &\iff \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \sum_i \lambda_i \langle u, v_i\rangle = 0 \\ &\iff \forall i = 1, ..., p, \langle u, v_i\rangle = 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Les expressions $\langle u, v_i\rangle = 0$, avec u inconnu et v_i connu, donnent les équations de $F^\perp$.

Base orthonormée : Une famille $\mathcal{F} = \{e_1, \ldots, e_p\}$ est

- orthogonale si pour tous $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$
- orthonormée si de plus, pour tout i, $\|e_i\| = 1$.

Exemples

– La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

– Dans $C^0([-\pi, \pi])$, avec le p.s. donné par l'intégrale, la famille $\{\sin(kt), k \in \mathbb{N}^*\}$ est orthogonale.

Trouver une b.o.n. : Algorithme de Gram-Schmidt

Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots u_p\}$ une base de E (ou d'un s.e.v. F).
On construit successivement des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}; \quad \text{et pour } k = 2, \ldots, p$$

$$e_k = \frac{u_k - \langle u_k, e_1\rangle e_1 - ... - \langle u_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}}{\|u_k - \langle u_k, e_1\rangle e_1 - ... - \langle u_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}\|}$$

Alors $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée (b.o.n.) de E ou F.

$\rightsquigarrow$ Dans la pratique, donc :

1. On construit e_1 en divisant u_1 par sa norme.
2. On calcule le vecteur $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1\rangle e_1$, puis on le divise par sa norme pour obtenir e_2.
3. On calcule le vecteur $v_3 = u_3 - \langle u_3, e_1\rangle e_1 - \langle u_3, e_2\rangle e_2$, puis on le divise par sa norme pour obtenir e_2.
4. Et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait atteint u_p !
5. Vérification : on doit avoir $\forall i \neq j$ $\langle e_i, e_j\rangle = 0$.

Projection orthogonale : Soit F un s.e.v. d'un espace euclidien *de dim finie* $(E, \langle ., .\rangle)$. Alors on a $E = F \oplus F^\perp$.
$\rightsquigarrow$ On peut définir la *projection orthogonale* sur F :

$$p_F : u = v + w \in E = F \oplus F^\perp \mapsto vF$$

- $p_F \in \mathcal{L}(E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$.
- $\forall u \in E$, $p_F(u) \in F$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$;
- Pour tout $v \in F$, $\|u - p_F(u)\| \leq \|u - v\|$; autrement dit $\|u - p_F(u)\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$

Pour trouver p_F :

1. On détermine une b.o.n. $\{e_1, \ldots, e_p\}$ de F en appliquant Gram-Schmidt à une base de F.
2. On a alors $\forall u \in E$, $p_F(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, e_i\rangle e_i$.

Pour trouver $p_{F^\perp}$:

1. Soit on fait comme pour p_F
2. Soit on connaît déjà p_F et dans ce cas, pour tout $u \in E$,

$$p_{F^\perp}(u) = u - p_F(u)$$

Pour calculer $d(u, F)$:

$$d(u, F) = \inf_{v \in F} \|v - u\| = \|u - p_F(u)\| = \|p_{F^\perp}(u)\|$$

Théorème de représentation de Riesz : Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire continue sur un espace euclidien *de dim finie*. Alors il existe un unique $v_\varphi \in E$, tel que, pour tout $u \in E$,

$$\varphi(u) = \langle u, v_\varphi\rangle$$

Adjoint d'un endomorphisme : $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $f^* \in \mathcal{L}(E)$, l'adjoint de f appelé tel que, pour tous $u, v \in E$,

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$$

Si $\mathcal{B}$ est une b.o.n. de E, la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f : $[f^*]_\mathcal{B} = {}^t[f]_\mathcal{B}$

Pour trouver f^* :

1. On détermine une b.o.n. $\mathcal{B} = \{e, \ldots, e_n\}$ de $(E, \langle , \rangle)$ via Gram-Schmidt
2. On calcule la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$

$\rightsquigarrow$ ${}^tA$ est la matrice de f^* dans $\mathcal{B}$

$\rightsquigarrow$ Pour chaque j, la j-ème colonnes de ${}^tA$ donne les β_{ij} tels que

$$f^*(e_j) = \sum_i \beta_{ij} e_i$$

3. Pour $u \in E$ quelconque, puisque $\mathcal{B}$ est une b.o.n., on a

$$u = \sum_j \langle u, e_j\rangle e_j \rightsquigarrow f^*(u) = \sum_j \langle u, e_j\rangle f^*(e_j)$$

et ça tombe bien, on connaît les vecteurs $f^*(e_j)$!

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si $f^* = f$.
$\rightsquigarrow$ La matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une b.o.n est symétrique.

Théorème : Si f est un endomorphisme autoadjoint de E, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.

Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ est diagonale.