Applications linéaires

Définitions : Soient E, F deux $\mathbb{K}-$espaces vectoriels, et $f : E \to F$ une application.

1. On dit que f est *linéaire* si pour tous $u, v \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a
$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$
2. Une application linéaire vérifie *toujours* $f(0_E) = 0_F$.
3. L'ensemble des applications linéaires $E \to F$ est noté $\boxed{\mathcal{L}(E, F)}$.
4. Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée *endomorphisme* de E. On note $\boxed{\mathcal{L}(E)}$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Exemple important : Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, alors
$$\Phi_A : v \in \mathbb{R}^p \mapsto Av \in \mathbb{R}^n$$
est une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.

Méthode Pour savoir si une application est linéaire :

1. Commencer par calculer $f(0_E)$. Si ça ne donne pas 0_F, f n'est pas linéaire.
2. Si ça donne 0_F, calculer $f(u + \lambda v)$ et essayer de séparer ce qui dépend de u de ce qui dépend de v dans l'expression obtenue, puis de mettre λ en facteur.

   $\rightsquigarrow$ Si on obtient $f(u) + \lambda f(v)$, f est linéaire ;

   $\rightsquigarrow$ Sinon, chercher un contre-exemple : trouver u_0, v_0 et λ_0 tels que $f(u_0 + \lambda_0 v_0) \neq f(u_0) + \lambda_0 f(v_0)$.

Opérations sur les applications linéaires

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f$ est linéaire.
  $\rightsquigarrow$ Si $f \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{f \circ ... \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E)$.

  ⚠ Pour des endomorphismes, on note $f^n = f \circ ... \circ f$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme linéaire, alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire.
- Si $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,
  alors $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Image et noyau : Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- On appelle *image* de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, l'espace vectoriel
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{v \in F,\ \exists u \in E \text{ tq } v = f(u)\} \subset F$$
- On appelle *rang* de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de son image :
$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$
- On appelle *noyau* de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, l'espace vectoriel
$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{u \in E,\ f(u) = 0_F\} \subset E$$

Propriétés : On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- **Théorème du rang** : $\boxed{\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f)}$
- f est *injective* ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim E$.
- f est *surjective* ssi $\mathrm{Im}(f) = F$ ssi $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.
- Si $\dim F = \dim E$, alors f est surjective ssi f est injective ssi f est bijective.

Image d'une famille libre ou génératrice Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $v_1, \ldots, v_p \in E$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$. On a
$$f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_p f(v_p)$$
On en déduit

- $f(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_p))$;

  $\rightsquigarrow$ Si $\{v_1, ..., v_p\}$ est génératrice, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(v_1), \ldots, f(v_p))$.

  $\rightsquigarrow$ Si f est surjective, et $\{v_1, ..., v_p\}$ est génératrice de E, alors $\{f(v_1), ..., f(v_p)\}$ est génératrice de F.

  ⚠ Si f n'est pas surjective, l'image d'une famille génératrice n'est pas génératrice.
- Si $\mathscr{F}$ est liée alors $(f(v_1), \ldots, f(v_p))$ est liée.
- Si f est injective, et $\{v_1, ..., v_p\}$ est libre, alors $\{f(v_1), ..., f(v_p)\}$ est libre.

  ⚠ Si f n'est pas injective, l'image d'une famille libre n'est pas forcément libre.
- Si f est un isomorphisme, et $\{v_1, ..., v_p\}$ est une base de E, alors $\{f(v_1), ..., f(v_p)\}$ est une base de F.

Des applications linéaires que vous connaissez déjà

- La *transposition* de matrices :
$$t : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto {}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$
- La *trace* de matrices carrées :
$$\mathrm{Tr} : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}(A) = a_{11} + ... + a_{nn} \in \mathbb{R}$$
- La *dérivée* des fonctions dérivables sur $[a, b]$:
$$D : f \in \mathcal{C}^1([a, b]) \mapsto f' \in \mathcal{C}^0([a, b])$$
(et du coup, la dérivée seconde $D \circ D$, et la dérivée n-ième $D^n = D \circ ... \circ D$)
- L'*intégrale* des fonctions continues sur $[a, b]$:
$$\mathcal{I} : f \in \mathcal{C}^0([a, b]) \mapsto \int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R}$$