Algèbre bilinéaire

Formes bilinéaires : Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. On dit que $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est une *forme bilinéaire* si elle vérifie

- Pour tout $u_0 \in E$, $y \in E \mapsto \varphi(u_0, v) \in \mathbb{R}$ est linéaire ;
- Pour tout $v_0 \in E$, $u \in E \mapsto \varphi(u, v_0) \in \mathbb{R}$ est linéaire.

On dit de qu'une forme bilinéaire φ est *symétrique* si, pour tout $(u,v) \in E \times E$, $\varphi(v,u) = \varphi(u,v)$.

L'ensemble des formes bilinéaires est un espace vectoriel : une combinaison linéaire de formes bilinéaires est une forme bilinéaire.

L'ensemble des formes bilinéaires symétriques est un s.e.v.

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique est

- *positive* si pour tout $u \in E, \varphi(u,u) \geq 0$
- *négative* si pour tout $u \in E, \varphi(u,u) \leq 0$
- *définie* si pour tout $u \in E, \varphi(u,u) = 0 \iff u = 0_E$.
- *non dégénérée* si pour tout $u_0 \in E$, $(v \mapsto \varphi(u_0, v)) = 0_{E^*} \iff u_0 = 0_E$.

$\rightsquigarrow$ Une forme définie est forcément non-dégénérée.

Un *produit scalaire* sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est appelé *espace euclidien*.

Exemples classiques :

- Soient $\ell, \ell' \in E^*$ deux formes linéaires. Alors $\varphi : (u,v) \in E \times E \mapsto \ell(u)\ell'(v)$ est une forme bilinéaire sur E.
  $\rightsquigarrow$ Si $\ell = \ell'$, la forme bilinéaire est symétrique.
  $\rightsquigarrow$ Soient $\ell_1, \dots, \ell_k \in E^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, alors
  $$\varphi(u,v) = \alpha_1 \ell_1(u)\ell_1(v) + \dots \alpha_k \ell_k(u)\ell_k(v)$$
  est une forme bilinéaire symétrique.
- $\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
- $\varphi : (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}({}^t AB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\varphi : (f,g) \in \mathcal{C}^0([0,1])^2 \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Matrice d'une forme bilinéaire : Supposons $\dim E < \infty$. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E. Pour $(u,v) \in E^2$, notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots y_n)$ les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$\varphi(u,v) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j).$$

La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A tq $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. On a alors $\boxed{\varphi(u,v) = {}^t XAY}$.

$\rightsquigarrow$ φ est symétrique ssi A est symétrique.

$\rightsquigarrow$ φ est non-dégénérée ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_E\}$ (i.e. A inversible).

Changement de base : Soit $\mathcal{B}'$ une autre base sur E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et A' la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors on a

$$A' = {}^t PAP$$

⚠ En général, ${}^t P \neq P^{-1}$: les matrices A et A' ne sont pas semblables.

Norme sur un espace euclidien : Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. Alors $\|.\| : u \mapsto \sqrt{\langle u,u \rangle} \in \mathbb{R}$ est une norme sur E, autrement dit :

1. $\|u\| = 0$ si, et seulement si, $u = 0_E$;
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, u \in E$, $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
3. Pour tous $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$\rightsquigarrow$ Un espace euclidien est en particulier un espace vectoriel normé.

On a *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* : pour tous $(u,v) \in E^2$, $|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$.

Orthogonalité : Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien.

- On dit que $u, v \in E$ sont *orthogonaux* si $\langle u,v \rangle = 0$.
- Soit $A \subset E$, on définit *l'orthogonal de A* par $A^\perp = \{v \in E, \forall u \in A, \langle u,v \rangle = 0\}$.
  ⚠ A n'est pas forcément un s.e.v.

$\rightsquigarrow$ $A^\perp$ est un s.e.v de E (même si A n'en est pas un).

$\rightsquigarrow$ On a le *théorème de Pythagore :* si u et v sont orthogonaux, alors $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Base orthonormée : Une famille $\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_p\}$ est

- *orthogonale* si pour tous $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$
- *orthonormée* si de plus, pour tout i, $\|e_i\| = 1$.
  $\rightsquigarrow$ On a alors, pour tous i, j, $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

Algorithme de Gram-Schmidt : Soit $\mathcal{B} = \{u_1, \dots u_n\}$ une base de E. On définit une famille de vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$ par :

- $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$.
- Pour $k = 2, \dots, n$ on définit le vecteur intermédiaire
  $$w_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle u_k, e_i \rangle e_i \text{ et } e_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}.$$

Alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base orthonormée (b.o.n.) de E.

De plus, pour tout k, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots u_k)$.

Matrices orthogonales : Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux b.o.n. de E. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ vérifie ${}^t PP = I_n$.

$\rightsquigarrow$ On dit qu'une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si $P^{-1} = {}^t P$.

⚠ Si l'une des deux bases n'est pas orthonormée pour $\langle .,. \rangle$, la matrice de passage ne sera pas orthogonale.

Projection orthogonale : Soit F un s.e.v. d'un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$. Alors on a $E = F \oplus F^\perp$.

$\rightsquigarrow$ On peut définir la *projection orthogonale* sur F :

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus F^\perp &\to F \\ u = v + w &\mapsto v \in F \end{aligned}$$

Alors, pour tout $u \in E$,

- $p_F \in \mathcal{L}(E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$.
- $p_F(u) \in F$ et $u - p_F(u) \in F^\perp$;
- Pour tout $v \in F$, $\|u - p_F(u)\| \leq \|u - v\|$; autrement dit
  $$\|u - p_F(u)\| = \min_{v \in F} \|u - v\|$$
- Si $\{e_1, \dots, e_k\}$ une b.o.n. de F, $p_F(u) = \sum_{i=1}^k \langle u, e_i \rangle e_i$.

Adjoint d'un endomorphisme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Alors il existe un unique $f^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tous $u, v \in E$,

$$\langle f(u), v\rangle = \langle u, f^*(v)\rangle$$

On appelle f^* l'*adjoint* de f.

Si $\mathcal{B}$ est une base *orthonormée* de E, alors la matrice de f^* dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f :

$$[f^*]_{\mathcal{B}} = {}^t[f]_{\mathcal{B}}$$

⚠ Ce n'est plus vrai si la base n'est pas orthonormée !

On dit qu'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est *autoadjoint* si $f^* = f$.
$\rightsquigarrow$ La matrice d'un endomorphisme autoadjoint dans une b.o.n est symétrique.

Théorème : Si f est un endomorphisme autoadjoint de E, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.
Autrement dit, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ est diagonale.

Formes quadratiques : Une application $q : E \mapsto \mathbb{R}$ est une *forme quadratique* sur E s'il existe une forme bilinéaire $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $u \in E$, $q(u) = \varphi(u,u)$.

Si q est une forme quadratique, il existe une unique forme bilinéaire *symétrique* telle que $q(u) = \varphi(u,u)$. On l'appelle la *forme polaire* de q. Elle est donnée par

$$\varphi(u,v) = \frac{1}{4}(q(u+v) - q(u-v))$$

La matrice de q dans une base $\mathcal{B}$ est la matrice A de sa forme polaire φ : on a donc, pour tout $u \in E$ de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathcal{B}$, $q(u) = {}^tXAX$.
En particulier, si $\mathcal{B}'$ est une autre base, et P la matrice de passage, alors la matrice de q dans la base $\mathcal{B}'$ est $A' = {}^tPAP$.
Le vocabulaire des formes bilinéaires s'étend aux formes quadratiques : on dit que q est *positive, définie positive, non-dégénérée,* etc. si φ l'est.

Réduction d'une forme quadratique : Réduire une forme quadratique, c'est trouver une base $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E dans laquelle la matrice D de q est diagonale ; autrement dit, pour tout $u \in E$ de coordonnées $X = (x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on a

$$q(u) = {}^tXDX = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$$

$\rightsquigarrow$ Si on note $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ la base duale de $\mathcal{B}$, on a donc, pour tout $u \in E$,

$$(\star) \quad q(u) = \lambda_1 \ell_1(u)^2 + \ldots + \lambda_n \ell_n(u)^2$$

Méthodes : Pour réduire une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$:

- On peut appliquer une méthode calculatoire à l'expression de q pour obtenir la forme $(\star)$: c'est la *méthode de Gauss.*
- La matrice de q est symétrique, donc on peut la diagonaliser dans une b.o.n. (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$), et on en déduit la forme réduire de q.

Méthode de Gauss : Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Deux cas possibles :

- Si q a un terme carré, par exemple x_1^2, on isole tous les termes contenant x_1 :

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n$$

$\rightsquigarrow$ on a $a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 =$

$$(a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n) + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + \ldots + \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2$$

donc on peut remplacer $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n$ par

$$\underbrace{a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2}_{a_{11}\ell_1(u)^2} - \left(\frac{a_{12}^2}{a_{11}}x_2^2 + \ldots + \frac{a_{1n}^2}{a_{11}}x_n^2\right)$$

On a donc réécrit $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = a_{11}\ell_1(u)^2 + \tilde{q}(x_2, \dots, x_n)$$

- Si q n'a pas de carré, on prend un terme "rectangle", par exemple x_1x_2. Puis on isole tous les termes qui comportent x_1 ou x_2 :

$$\begin{aligned} q(x) &= 2a_{12}(x_1x_2 + x_1B(x_3, \dots x_n) + x_2C(x_3, \dots x_n)) \\ &\quad + \tilde{q}(x_3, \dots x_n) \\ &= 2a_{12}(x_1 + C)(x_2 + B) - 2a_{12}BC + \tilde{q}(x_3, \dots x_n) \\ &= \underbrace{\frac{a_{12}}{2}(x_1 + x_2 + B + C)^2}_{=\lambda_1\ell_1^2} - \underbrace{\frac{a_{12}}{2}(x_1 - x_2 - B + C)^2}_{=\lambda_2\ell_2^2} \\ &\quad - 2a_{12}BC + \tilde{q}(x_3, \dots x_n) \end{aligned}$$

- Reste alors les termes $\tilde{q}$ ou $BC - \tilde{q}$, qui ne comportent pas la variable x_1. On les traite de la même façon, en réduisant à chaque fois le nombre de variables.

Rang et signature : Une fois la réduction faite, on a donc

$$q(u) = \lambda_1\ell_1(u)^2 + \ldots + \lambda_r\ell_r(u)^2 \text{ avec } r \leq n.$$

- r est le *rang* de q. On a $r = \mathrm{rg}(A)$.
- La forme quadratique est positive ssi $\lambda_i \geq 0$ pour tout i.
- La forme quadratique est définie positive ssi $r = n$ et $\lambda_i > 0$ pour tout i.
- Notons s le nombre de i t.q. $\lambda_i > 0$ et t le nombre de i t.q. $\lambda_i < 0$. On appelle (s,t) la *signature* de q.
  $\rightsquigarrow$ $s + t = r$

De plus, si on complète $\{\ell_1, \dots, \ell_r\}$ en une base $\mathcal{B}^*$ de $(\mathbb{R}^n)^*$, alors la base antéduale de $\mathcal{B}^*$ fournit une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de D est diagonale ; autrement dit, en mettant ces vecteurs en colonne, on obtient une matrice inversible P t.q. ${}^tPAP = D$.

⚠La base en question n'est pas forcément orthonormée pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, donc la matrice P n'est pas forcément orthogonale.
En particulier, $P^{-1}AP \neq {}^tPAP$: on n'a pas diagonalisé la matrice A !