Méthodes de recollement en géométrie presque-kählérienne

Caroline Vernier, Gilles Carron, Yann Rollin

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Nantes

Sommaire

1 Le programme de Calabi.

2 Un survol des méthodes de recollement en géométrie kählérienne.

3 Extension au cadre presque-kählérien.

4 Sphères hamiltoniennes stationnaires.

1 Le programme de Calabi.

2 Un survol des méthodes de recollement en géométrie kählérienne.

3 Extension au cadre presque-kählérien.

4 Sphères hamiltoniennes stationnaires.

Question: Sur une variété compacte lisse donnée, existe-t-il une métrique riemannienne "privilégiée" ?

Question: Sur une variété compacte lisse donnée, existe-t-il une métrique riemannienne "privilégiée" ?

Inspiration: Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann

Soit (Σ^2, J) une surface de Riemann compacte. Il existe sur Σ une métrique riemannienne g compatible avec J, à courbure de Gauss constante. Cette métrique est unique à isométries près si l'on fixe $Vol_g(\Sigma) = 1$.

Question: Sur une variété compacte lisse donnée, existe-t-il une métrique riemannienne "privilégiée" ?

Inspiration: Théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann

Soit (Σ^2, J) une surface de Riemann compacte. Il existe sur Σ une métrique riemannienne g compatible avec J, à courbure de Gauss constante. Cette métrique est unique à isométries près si l'on fixe $Vol_g(\Sigma) = 1$.

- Cadre: variétés (presque-)kählériennes
- Métriques privilégiées = métriques à courbure scalaire constante dans une classe de Kähler fixée.

L'existence de telles métriques dans une classe de Kähler donnée est un problème difficile:

L'existence de telles métriques dans une classe de Kähler donnée est un problème difficile:

- Obstructions liées à l'existence de champs de vecteurs holomorphes.
- Conjecture de Tian-Yau-Donaldson: action hamiltonienne sur l'espace des structures (presque)-complexes compatible avec la forme de Kähler. L'application moment correspondante est alors $s(\omega) - \bar{s}$.
- Travaux récents de Chen et Cheng.

L'existence de telles métriques dans une classe de Kähler donnée est un problème difficile:

- Obstructions liées à l'existence de champs de vecteurs holomorphes.
- Conjecture de Tian-Yau-Donaldson: action hamiltonienne sur l'espace des structures (presque)-complexes compatible avec la forme de Kähler. L'application moment correspondante est alors $s(\omega) - \bar{s}$.
- Travaux récents de Chen et Cheng.

Les *méthodes de recollement* sont un moyen d'obtenir des classes d'exemples explicites.
Exemples: Travaux d'Arezzo et Pacard, Szekelyhidi.

1 Le programme de Calabi.

2 Un survol des méthodes de recollement en géométrie kählérienne.

3 Extension au cadre presque-kählérien.

4 Sphères hamiltoniennes stationnaires.

Ingrédient 1: Orbifold

(M, J_M, ω_M) un orbifold Kähler compact, avec une seule singularité isolée p de type $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où $\Gamma \subset U(m)$ ne fixe que l'origine.

Ingrédient 1: Orbifold

(M, J_M, ω_M) un orbifold Kähler compact, avec une seule singularité isolée p de type $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où $\Gamma \subset U(m)$ ne fixe que l'origine.
On suppose:

- (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe non trivial;

Ingrédient 1: Orbifold

(M, J_M, ω_M) un orbifold Kähler compact, avec une seule singularité isolée p de type $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où $\Gamma \subset U(m)$ ne fixe que l'origine.
On suppose:

- (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe non trivial;
- (M, J_M, ω_M) à courbure scalaire constante.

Ingrédient 1: Orbifold

(M, J_M, ω_M) un orbifold Kähler compact, avec une seule singularité isolée p de type $\mathbb{C}^m/\Gamma$, où $\Gamma \subset U(m)$ ne fixe que l'origine.
On suppose:

- (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe non trivial;
- (M, J_M, ω_M) à courbure scalaire constante.

Au voisinage de p, on dispose de coordonnées holomorphes

$$\underline{z} : p \ni U \to U' \subset \mathbb{C}^m/\Gamma$$

dans lesquelles

$$\omega_M = \omega_{eucl} + O(|\underline{z}|^2).$$

Ingrédient 2: Une variété ALE

(X, J_X, ω_X) une résolution *asymptotiquement localement euclidienne* (ALE) de $\mathbb{C}^m/\Gamma$.

Ingrédient 2: Une variété ALE

(X, J_X, ω_X) une résolution *asymptotiquement localement euclidienne* (ALE) de $\mathbb{C}^m/\Gamma$.

On dispose de coordonnées holomorphes

$$\underline{u} : X \setminus K \to (\mathbb{C}^m \setminus B(0,R))/\Gamma$$

telles que

$$\omega_X = \omega_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m}).$$

Ingrédient 2: Une variété ALE

(X, J_X, ω_X) une résolution *asymptotiquement localement euclidienne* (ALE) de $\mathbb{C}^m/\Gamma$.

On dispose de coordonnées holomorphes

$$\underline{u} : X \setminus K \to (\mathbb{C}^m \setminus B(0,R))/\Gamma$$

telles que

$$\omega_X = \omega_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m}).$$

On suppose (X, J_X, ω_X) à courbure scalaire nulle.

La 'somme connexe'

On utilise ces coordonnées pour identifier un anneau autour de $p \in M$ à une région de X par une homothétie.

On obtient ainsi une variété *complexe* lisse M_ε.

La 'somme connexe'

On utilise ces coordonnées pour identifier un anneau autour de $p \in M$ à une région de X par une homothétie.

On obtient ainsi une variété *complexe* lisse M_ε.

On la munit d'une forme de Kähler en recollant ω_M et ω_X par des fonctions de cut-off.

La 'somme connexe'

On utilise ces coordonnées pour identifier un anneau autour de $p \in M$ à une région de X par une homothétie.

On obtient ainsi une variété *complexe* lisse M_ε.

On la munit d'une forme de Kähler en recollant ω_M et ω_X par des fonctions de cut-off.

On cherche alors $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$ telle que

$$s(\omega_\varepsilon + dd^c f) = \lambda.$$

1 Le programme de Calabi.

2 Un survol des méthodes de recollement en géométrie kählérienne.

3 Extension au cadre presque-kählérien.

4 Sphères hamiltoniennes stationnaires.

Définition

Une variété *presque-kählérienne* est une variété symplectique (V, ω) munie d'une structure presque complexe compatible J.

On notera $\mathcal{AC}_\omega$ l'ensemble des structures presque complexes sur V compatibles avec ω.

Définition

Une variété *presque-kählérienne* est une variété symplectique (V, ω) munie d'une structure presque complexe compatible J.

On notera $\mathcal{AC}_\omega$ l'ensemble des structures presque complexes sur V compatibles avec ω.

Extension du programme de Calabi aux variétés presque-kählériennes:

- Lejmi: étude de la fonctionnelle de Calabi, de l'invariant de Futaki
- Weinkove: équation de Calabi-Yau.

Définition

Une variété *presque-kählérienne* est une variété symplectique (V, ω) munie d'une structure presque complexe compatible J.

On notera $\mathcal{AC}_\omega$ l'ensemble des structures presque complexes sur V compatibles avec ω.

Extension du programme de Calabi aux variétés presque-kählériennes:

- Lejmi: étude de la fonctionnelle de Calabi, de l'invariant de Futaki
- Weinkove: équation de Calabi-Yau.

Question: Peut-on utiliser des méthodes de recollement pour obtenir des exemples de métriques privilégiées presque-kählériennes ?

On utilise des espaces ALE (X, J_X, ω_X) plus généraux:

$$\underline{u} : X \setminus K \to \mathbb{C}^m/\Gamma$$

difféomorphisme en dehors d'un compact, tel que

$$\begin{aligned} \omega_X &= \omega_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m}) \\ J_X &= J_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m}). \end{aligned}$$

Par exemple, déformations complexes de résolutions.

On utilise des espaces ALE (X, J_X, ω_X) plus généraux:

$$\underline{u} : X \setminus K \to \mathbb{C}^m/\Gamma$$

difféomorphisme en dehors d'un compact, tel que

$$\omega_X = \omega_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m})$$
$$J_X = J_{eucl} + O(|\underline{u}|^{2-2m}).$$

Par exemple, déformations complexes de résolutions.

De telles déformations non-triviales n'existent qu'en dimension complexe 2 (Hein, Radeasconu, Suvaina).

Ingrédients

- (M, J_M, ω_M) une surface orbifold kählérienne à courbure scalaire constante, avec une seule singularité p modelée sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe.

Ingrédients

- (M, J_M, ω_M) une surface orbifold kählérienne à courbure scalaire constante, avec une seule singularité p modelée sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe.
- $(X \simeq T^*S^2, J_X, \omega_X)$ surface ALE asymptote à $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

Ingrédients

- (M, J_M, ω_M) une surface orbifold kählérienne à courbure scalaire constante, avec une seule singularité p modelée sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. (M, J_M) n'admet pas de champ de vecteurs holomorphe.
- $(X \simeq T^*S^2, J_X, \omega_X)$ surface ALE asymptote à $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.
  On l'obtient en résolvant $\mathrm{Ric}(dd^c\varphi) = 0$, où $\varphi = f(|z|^2)$ sur des *lissages*
  $$\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^3$$
  de
  $$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \simeq \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}.$$
  La métrique riemannienne obtenue est alors celle d'Eguchi-Hanson. La structure complexe héritée de $\mathbb{C}^3$ vérifie
  $$J_X - J_{eucl} = O(|u|^{-4}).$$

Somme connexe généralisée.

On travaille dans des cartes de Darboux.

- Sur l'orbifold: version équivariante du théorème de Darboux au voisinage de p. On obtient

  $$\underline{x} : p \ni U \to U' \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$$

  tel que ω_M coincide avec ω_{eucl}. De plus

  $$J_M = J_{eucl} + O(|\underline{x}|^2).$$

Somme connexe généralisée.

On travaille dans des cartes de Darboux.

- Sur l'orbifold: version équivariante du théorème de Darboux au voisinage de p. On obtient

$$\underline{x} : p \ni U \to U' \subset \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$$

tel que ω_M coincide avec ω_{eucl}. De plus

$$J_M = J_{eucl} + O(|\underline{x}|^2).$$

- Sur l'espace ALE: changement de variable explicite. On obtient

$$\underline{u} : X \setminus K \to (\mathbb{C}^2 \setminus B(0,R))/\mathbb{Z}_2$$

tel que ω_X coincide avec ω_0. De plus, a encore

$$J_X - J_{eucl} = O(|\underline{u}|^{-4}).$$

En réalisant la somme connexe dans ces cartes, on obtient une famille de variétés *symplectiques* $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$.

En réalisant la somme connexe dans ces cartes, on obtient une famille de variétés *symplectiques* $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$.

Remarques:

1. Les $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ sont toutes symplectomorphes à une même variété $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$;

En réalisant la somme connexe dans ces cartes, on obtient une famille de variétés *symplectiques* $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$.

Remarques:

1. Les $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ sont toutes symplectomorphes à une même variété $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$;
2. La section nulle de $X \simeq T^*S^2$ donne une sphère lagrangienne S dans $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$.

On souhaite

- munir M_ε d'une structure presque complexe compatible avec ω_ε.
- perturber cette structure pour la rendre 'canonique'.

Structure presque complexe sur $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$.

On a la description suivante des éléments de $\mathcal{AC}_\omega$ sur une variété symplectique (V, ω).

Théoreme

Soit (V, ω) une variété symplectique. On pose

$$\mathrm{End}(TV, \omega) = \{a \in \mathrm{End}(TV), \omega(aX, Y) + \omega(X, aY) = 0\},$$

l'algèbre de Lie du groupe des automorphismes de TV préservant ω. Alors, si $J_1, J_2 \in \mathcal{AC}_\omega$, il existe un unique $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{End}(TV, \omega))$ tel que

$$J_2 = \exp(a) J_1 \exp(-a).$$

On utilise cette description pour obtenir par cutoff

- une s.p.c. J_{r_ε} sur M, compatible avec ω_M, telle que

$$J_{r_\varepsilon} = \begin{cases} J_0 \text{ sur } \{|\underline{x}| \leq 2r_\varepsilon\} \\ J_M \text{ sur } \{|\underline{x}| \geq 4r_\varepsilon\} \end{cases}$$

On utilise cette description pour obtenir par cutoff

- une s.p.c. J_{r_ε} sur M, compatible avec ω_M, telle que

$$J_{r_\varepsilon} = \begin{cases} J_0 \text{ sur } \{|\underline{x}| \leq 2r_\varepsilon\} \\ J_M \text{ sur } \{|\underline{x}| \geq 4r_\varepsilon\} \end{cases}$$

- une s.p.c. J_{R_ε} sur X, compatible avec ω_X, telle que

$$J_{R_\varepsilon} = \begin{cases} J_X \text{ sur } \{|\underline{u}| \leq R_\varepsilon\} \\ J_0 \text{ sur } \{|\underline{u}| \geq 2R_\varepsilon\} \end{cases}$$

En les recollant, on obtient ainsi une variété presque-kählérienne $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon, J_\varepsilon, g_\varepsilon)$.

On utilise cette description pour obtenir par cutoff

- une s.p.c. J_{r_ε} sur M, compatible avec ω_M, telle que
$$J_{r_\varepsilon} = \begin{cases} J_0 \text{ sur } \{|\underline{x}| \leq 2r_\varepsilon\} \\ J_M \text{ sur } \{|\underline{x}| \geq 4r_\varepsilon\} \end{cases}$$
- une s.p.c. J_{R_ε} sur X, compatible avec ω_X, telle que
$$J_{R_\varepsilon} = \begin{cases} J_X \text{ sur } \{|\underline{u}| \leq R_\varepsilon\} \\ J_0 \text{ sur } \{|\underline{u}| \geq 2R_\varepsilon\} \end{cases}$$

En les recollant, on obtient ainsi une variété presque-kählérienne $(M_\varepsilon, \omega_\varepsilon, J_\varepsilon, g_\varepsilon)$.

Remarques:

1. J_ε n'est pas intégrable, mais N_{J_ε} est à support dans la zone de recollement $\{r_\varepsilon \leq |\underline{x}| \leq 4r_\varepsilon\}$, et contrôlé par des puissances positives de ε.
2. La sphère lagrangienne S_ε est minimale pour g_ε.

Perturbation de la solution approximative

Problème: Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, la forme

$$\omega_f := \omega_\varepsilon + dJ_\varepsilon df$$

n'est pas J_ε-invariante.

Perturbation de la solution approximative

Problème: Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, la forme

$$\omega_f := \omega_\varepsilon + dJ_\varepsilon df$$

n'est pas J_ε-invariante.

Solution: On fixe ω_ε et on bouge J_ε dans $\mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$.

Perturbation de la solution approximative

Problème: Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, la forme

$$\omega_f := \omega_\varepsilon + dJ_\varepsilon df$$

n'est pas J_ε-invariante.

Solution: On fixe ω_ε et on bouge J_ε dans $\mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$.
À $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, on associe le champ de vecteur hamiltonien X_f.

Perturbation de la solution approximative

Problème: Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, la forme

$$\omega_f := \omega_\varepsilon + dJ_\varepsilon df$$

n'est pas J_ε-invariante.

Solution: On fixe ω_ε et on bouge J_ε dans $\mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$.
À $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, on associe le champ de vecteur hamiltonien X_f.
Alors, $a_f := \mathcal{L}_{X_f} J_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{End}(TM_\varepsilon, \omega_\varepsilon))$

Perturbation de la solution approximative

Problème: Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, la forme

$$\omega_f := \omega_\varepsilon + dJ_\varepsilon df$$

n'est pas J_ε-invariante.

Solution: On fixe ω_ε et on bouge J_ε dans $\mathcal{AC}_{\omega_\varepsilon}$.
À $f \in \mathcal{C}^\infty(M_\varepsilon)$, on associe le champ de vecteur hamiltonien X_f.
Alors, $a_f := \mathcal{L}_{X_f} J_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathrm{End}(TM_\varepsilon, \omega_\varepsilon))$
et on pose

$$J_f := \exp(-a_f) J_\varepsilon \exp(a_f).$$

L'équation

On cherche alors à résoudre

$$s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda, \tag{1}$$

où s^{∇} est la *courbure scalaire hermitienne* de $(M_\varepsilon, J_f, \omega_\varepsilon)$.

L'équation

On cherche alors à résoudre

$$s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda, \tag{1}$$

où s^{∇} est la *courbure scalaire hermitienne* de $(M_\varepsilon, J_f, \omega_\varepsilon)$.

- La courbure de Ricci hermitienne $\rho^{\nabla}(J_f)$ est la courbure de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique $K^*_{J_f}$;

L'équation

On cherche alors à résoudre

$$s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda, \tag{1}$$

où s^{∇} est la *courbure scalaire hermitienne* de $(M_\varepsilon, J_f, \omega_\varepsilon)$.

- La courbure de Ricci hermitienne $\rho^{\nabla}(J_f)$ est la courbure de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique $K^*_{J_f}$;
- La courbure scalaire hermitienne est sa trace $s^{\nabla}(J_f) = \Lambda\rho^{\nabla}(J_f)$.

L'équation

On cherche alors à résoudre

$$s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda, \tag{1}$$

où s^{∇} est la *courbure scalaire hermitienne* de $(M_\varepsilon, J_f, \omega_\varepsilon)$.

- La courbure de Ricci hermitienne $\rho^{\nabla}(J_f)$ est la courbure de la connexion de Chern sur le fibré anticanonique $K^*_{J_f}$;
- La courbure scalaire hermitienne est sa trace $s^{\nabla}(J_f) = \Lambda\rho^{\nabla}(J_f)$.

L'équation (1) est une équation aux dérivées partielles d'ordre 4 en f.

Stratégie.

On va imiter la preuve du théorème d'inversion locale. On linéarise:

$$L_\varepsilon(f) := \frac{d}{dt}_{|t=0} s^\nabla(J_{tf}),$$

ce qui donne

$$s^\nabla(J_f) = s^\nabla(J_\varepsilon) + L_\varepsilon(f) + Q_\varepsilon(f).$$

Stratégie.

On va imiter la preuve du théorème d'inversion locale. On linéarise:

$$L_\varepsilon(f) := \frac{d}{dt}_{|t=0} s^\nabla(J_{tf}),$$

ce qui donne

$$s^\nabla(J_f) = s^\nabla(J_\varepsilon) + L_\varepsilon(f) + Q_\varepsilon(f).$$

L'opérateur linéarisé est donné par

$$\begin{aligned} L_\varepsilon f &= -\Delta^2_{g_\varepsilon} f + 2\delta_{g_\varepsilon} \mathrm{Ric}_{g_\varepsilon}(\mathrm{grad}_{g_\varepsilon} f, \cdot) + E_\varepsilon f \\ &= \mathbb{L}_{M_\varepsilon} f + E_\varepsilon f, \end{aligned}$$

où $\mathbb{L}$ est *l'opérateur de Lichnerowicz* sur M_ε, et le terme d'erreur E_ε est petit: ses coefficients sont comparables au tenseur de Nijenhuis de J_ε.

L'équation $s^\nabla(J_f) = s_M + \lambda$ se réécrit alors

$$L_\varepsilon(f) + \lambda = s_M - s^\nabla(J_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

L'équation $s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda$ se réécrit alors

$$L_\varepsilon(f) + \lambda = s_M - s^{\nabla}(J_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

Il nous faut donc

L'équation $s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda$ se réécrit alors

$$L_\varepsilon(f) + \lambda = s_M - s^{\nabla}(J_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

Il nous faut donc

1. Construire un inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon(f, \lambda) = L_\varepsilon f + \lambda$ dans des espaces de Banach appropriés

L'équation $s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda$ se réécrit alors

$$L_\varepsilon(f) + \lambda = s_M - s^{\nabla}(J_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

Il nous faut donc

1. Construire un inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon(f, \lambda) = L_\varepsilon f + \lambda$ dans des espaces de Banach appropriés
2. Obtenir une estimée de $s^{\nabla}(J_\varepsilon) - s_M$,

L'équation $s^{\nabla}(J_f) = s_M + \lambda$ se réécrit alors

$$L_\varepsilon(f) + \lambda = s_M - s^{\nabla}(J_\varepsilon) - Q_\varepsilon(f).$$

Il nous faut donc

1. Construire un inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon(f, \lambda) = L_\varepsilon f + \lambda$ dans des espaces de Banach appropriés
2. Obtenir une estimée de $s^{\nabla}(J_\varepsilon) - s_M$,
3. Contrôler le terme non-linéaire Q_ε.

Inverse à droite de l'opérateur linéaire.

Idée: Comparer $\tilde{L}_\varepsilon$ aux opérateurs modèles:

Inverse à droite de l'opérateur linéaire.

Idée: Comparer $\tilde{L}_\varepsilon$ aux opérateurs modèles:

- $\tilde{L}_{M^*} : (f, \lambda) \mapsto \mathbb{L}_{M^*} f + \lambda$ sur l'orbifold épointé $M^* = M \setminus \{p\}$;

Inverse à droite de l'opérateur linéaire.

Idée: Comparer $\tilde{L}_\varepsilon$ aux opérateurs modèles:

- $\tilde{L}_{M^*} : (f, \lambda) \mapsto \mathbb{L}_{M^*} f + \lambda$ sur l'orbifold épointé $M^* = M \setminus \{p\}$;
- $\mathbb{L}_X : f \mapsto \mathbb{L}_X f$ sur la surface ALE X.

Inverse à droite de l'opérateur linéaire.

Idée: Comparer $\tilde{L}_\varepsilon$ aux opérateurs modèles:

- $\tilde{L}_{M^*} : (f, \lambda) \mapsto \mathbb{L}_{M^*} f + \lambda$ sur l'orbifold épointé $M^* = M \setminus \{p\}$;
- $\mathbb{L}_X : f \mapsto \mathbb{L}_X f$ sur la surface ALE X.

Ces opérateurs sont définis sur des variétés *non-compactes*: ils n'ont pas de bonnes propriétés de régularité dans les espaces de Hölder usuels $\mathcal{C}^{k,\alpha}(M^*)$, $\mathcal{C}^{k,\alpha}(X)$ (ex: estimées de Schauder).

Espaces de Hölder à poids

On va donc utiliser des espaces de Hölder à poids $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}$ définis comme suit:

Espaces de Hölder à poids

On va donc utiliser des espaces de Hölder à poids $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}$ définis comme suit:

Définition

- **Sur** M^*: $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(M^*)$ ssi $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M^*)$ et si ϕ se comporte 'au pire' comme $|\underline{x}|^{\delta}$ au voisinage de p.

Espaces de Hölder à poids

On va donc utiliser des espaces de Hölder à poids $\mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}$ définis comme suit:

Définition

- **Sur** M^*: $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(M^*)$ ssi $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M^*)$ et si ϕ se comporte 'au pire' comme $|\underline{x}|^{\delta}$ au voisinage de p.
- **Sur** X: $\psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\delta}(X)$ ssi $\psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(X)$ et si ψ se comporte 'au pire' comme $|\underline{u}|^{\delta}$ à l'infini.

Espaces de Hölder à poids

On va donc utiliser des espaces de Hölder à poids $\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta$ définis comme suit:

Définition

- **Sur** M^*: $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M^*)$ ssi $\phi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M^*)$ et si ϕ se comporte 'au pire' comme $|\underline{x}|^\delta$ au voisinage de p.
- **Sur** X: $\psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X)$ ssi $\psi \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(X)$ et si ψ se comporte 'au pire' comme $|\underline{u}|^\delta$ à l'infini.
- **Sur** M_ε: On décompose $f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M_\varepsilon)$ en $f = \gamma_1 f + \gamma_2 f$, où $\gamma_1 f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(M^*)$ et $\gamma_2 f \in \mathcal{C}^{k,\alpha}_{\mathrm{loc}}(X)$ respectivement. On pose alors

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M_\varepsilon)} = \|\gamma_1 f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(M^*)} + \varepsilon^{-\delta}\|\gamma_2 f\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}_\delta(X)}.$$

Dans ces espaces, les opérateurs modèles se comportent bien:

Proposition

Pour $0 < \delta < 1$, $0 < \alpha < 1$ on a

Dans ces espaces, les opérateurs modèles se comportent bien:

Proposition

Pour $0 < \delta < 1$, $0 < \alpha < 1$ on a

- Soit $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support dans $B(p, 2r_0)$ et valant 1 dans $B(p, r_0)$.

Dans ces espaces, les opérateurs modèles se comportent bien:

Proposition

Pour $0 < \delta < 1$, $0 < \alpha < 1$ on a

- Soit $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support dans $B(p, 2r_0)$ et valant 1 dans $B(p, r_0)$. Alors

$$\tilde{L}_{M^*} : (\mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M^*) \oplus \mathrm{Vect}(\xi)) \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$$

admet un inverse à droite G_1;

Dans ces espaces, les opérateurs modèles se comportent bien:

Proposition

Pour $0 < \delta < 1$, $0 < \alpha < 1$ on a

- Soit $\xi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ à support dans $B(p, 2r_0)$ et valant 1 dans $B(p, r_0)$. Alors
$$\tilde{L}_{M^*} : (\mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(M^*) \oplus \mathrm{Vect}(\xi)) \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M^*)$$
admet un inverse à droite G_1;
- $\mathbb{L}_X : \mathcal{C}^{4,\alpha}_\delta(X) \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(X)$ admet un inverse à droite G_2.

Inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon$

On en déduit:

Théorème

Pour $0 < \delta < 1$, pour ε suffisamment petit, l'opérateur

$$\tilde{L}_\varepsilon : \mathcal{C}^{4,\alpha}_{\delta}(M_\varepsilon) \times \mathbb{R} \to \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$$

admet un inverse à droite G_ε, tel que $\|G_\varepsilon\| \leq \varepsilon^{-\delta\beta}$, où $0 < \beta < 1$.

Idée de preuve: On recolle ensemble G_1 et G_2 en un inverse approximatif. Pour $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$, on pose

$$\tilde{G}_\varepsilon(f) = \zeta_1 G_1(\gamma_1 f) + \zeta_2 G_2(\gamma_2 f),$$

Idée de preuve: On recolle ensemble G_1 et G_2 en un inverse approximatif. Pour $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$, on pose

$$\tilde{G}_\varepsilon(f) = \zeta_1 G_1(\gamma_1 f) + \zeta_2 G_2(\gamma_2 f),$$

et on montre

$$\|\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G}_\varepsilon - I\| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Idée de preuve: On recolle ensemble G_1 et G_2 en un inverse approximatif. Pour $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}_{\delta-4}(M_\varepsilon)$, on pose

$$\tilde{G}_\varepsilon(f) = \zeta_1 G_1(\gamma_1 f) + \zeta_2 G_2(\gamma_2 f),$$

et on montre

$$\|\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G}_\varepsilon - I\| \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Alors $G_\varepsilon := \tilde{G}_\varepsilon \circ (\tilde{L}_\varepsilon \circ \tilde{G}_\varepsilon)^{-1}$ est un inverse à droite de $\tilde{L}_\varepsilon$.

1 Le programme de Calabi.

2 Un survol des méthodes de recollement en géométrie kählérienne.

3 Extension au cadre presque-kählérien.

4 Sphères hamiltoniennes stationnaires.

Définition et équation d'Euler-Lagrange.

Définition

Soit (V, ω, J, g) une variété presque-kählérienne. Une sous-variété lagrangienne L de V est hamiltonienne stationnaire si

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} Vol_g(\exp(sX_F)(L)) = 0$$

pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(L)$.

Définition et équation d'Euler-Lagrange.

Définition

Soit (V, ω, J, g) une variété presque-kählérienne. Une sous-variété lagrangienne L de V est hamiltonienne stationnaire si

$$\frac{d}{ds}_{|s=0} Vol_g(\exp(sX_F)(L)) = 0$$

pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(L)$.

Soit H le champ de vecteur de courbure moyenne de L. On définit la *forme de Maslov* $\alpha := H \lrcorner \omega$.
Alors l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème est

$$\delta\alpha = 0.$$

Construction de sphères hamiltoniennes stationnaires.

Dans notre situation, on a obtenu essentiellement une variété symplectique $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ munie

- d'une sphère lagrangienne S;
- d'une famille de métriques à courbure scalaire hermitienne constante $(\tilde{J}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon)$.

Construction de sphères hamiltoniennes stationnaires.

Dans notre situation, on a obtenu essentiellement une variété symplectique $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ munie

- d'une sphère lagrangienne S;
- d'une famille de métriques à courbure scalaire hermitienne constante $(\tilde{J}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon)$.

A cette famille de métriques, on peut adjoindre la solution approchée $(\tilde{J}_0, \tilde{g}_0)$. S est minimale, donc Hamiltonienne stationnaire, pour cette métrique.

Construction de sphères hamiltoniennes stationnaires.

Dans notre situation, on a obtenu essentiellement une variété symplectique $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ munie

- d'une sphère lagrangienne S;
- d'une famille de métriques à courbure scalaire hermitienne constante $(\tilde{J}_\varepsilon, \tilde{g}_\varepsilon)$.

A cette famille de métriques, on peut adjoindre la solution approchée $(\tilde{J}_0, \tilde{g}_0)$. S est minimale, donc Hamiltonienne stationnaire, pour cette métrique.

Question: Pour ε suffisamment petit, peut-on trouver une fonction F_ε telle que $\exp(X_{F_\varepsilon})(S)$ soit hamiltonienne stationnaire pour $(\tilde{g}_\varepsilon, \tilde{J}_\varepsilon)$?

Réponse: Oui ! Il s'agit d'étudier l'opérateur

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{AC}_{\tilde{\omega}}) \times \mathcal{C}^{4,\alpha}(S) &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}(S) \\ (J, F) &\mapsto \delta_{J,F}\alpha_{J,F} \end{aligned}$$

Réponse: Oui ! Il s'agit d'étudier l'opérateur

$$\begin{aligned} B : \mathcal{C}^{2,\alpha}(\mathcal{AC}_{\tilde{\omega}}) \times \mathcal{C}^{4,\alpha}(S) &\to \mathcal{C}^{0,\alpha}(S) \\ (J, F) &\mapsto \delta_{J,F}\alpha_{J,F} \end{aligned}$$

On a alors $B(\tilde{J}_0, 0) = 0$.

Par ailleurs, la linéarisation de B en $(\tilde{J}_0, 0)$ par rapport à la seconde variable est $\Delta^2_{\tilde{g}_0}$ (formule de Oh).

Cela permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites.

Merci de votre attention !