Trigonalisation - Quelques exemples

Définition:

- Un endormorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice triangulaire supérieure.
- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *trigonalisable* s'il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire supérieure T telle que
$$T = P^{-1}AP,$$
ce qui revient à dire que l'endomorphisme $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto AX \in \mathbb{R}^n$ associé à A est trigonalisable.

Théorème: Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$) est trigonalisable *si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur* $\mathbb{R}$, c'est-à-dire admet n racines réelles comptées avec leur multiplicité.

Par exemple:

1. Le polynôme $P_1(X) = X^3 + 2X^2 + X = X(X+1)^2$ a une racine double: -1 et une racine simple: 0. Donc la somme des multiplicités des racines est $1 + 2 = 3 = \deg P_1$, donc il est scindé.
2. De même, le polynôme $P_2(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = (X-1)^3$ a une racine triple: 1. Donc à nouveau la somme des multiplicités des racines est $3 = \deg P_2$, donc P_2 est scindé.
3. Enfin, le polynôme $P_3(X) = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ a quatre racines simples, donc la somme de la multiplicité des racines est $1 + 1 + 1 + 1 = \deg P_3$, donc il est aussi scindé.
4. En revanche, le polynôme $Q(X) = X(X^2 + 1)$ a une seule racine réelle simple, 0, donc la somme de la multiplicité des racines est $1 < \deg Q$ donc il n'est pas scindé.

Enfin, on a

Forme réduite de Jordan pour $n = 2$ et $n = 3$

- Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors, selon le nombre de valeurs propres de A et la dimension des sous-espaces propres associés, A est semblable à une des matrices suivantes:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
- Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors, selon le nombre de valeurs propres de A et la dimension des sous-espaces propres associés, A est semblable à une des matrices suivantes:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & r\cos(\theta) & r\sin(\theta) \\ 0 & -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exemple 1

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

et essayons de le trigonaliser.

On calcule le polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2+\lambda)((3-\lambda)(-1-\lambda)+4) \\ &= -(2+\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) \\ &= -(2+\lambda)(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

$\leadsto$ Le polynôme caractéristique de f est scindé. Il y a une valeur propre simple, -2, et une valeur propre double, 1. Détemrinons une base des sous-espaces propres associés.

Base de E_{-2}: Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_{-2} &\iff (A + 2I_3)u = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} 5x + y &= 0 \\ -4x + y &= 0 \\ 4x - 8y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x + y &= 0 \\ -4x + y &= 0 \\ -7y &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 5x &= 0 \\ -4x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \\ &\iff u = (0, 0, z) \in Vect((0, 0, 1)) \end{aligned}$$

Donc $E_{-2} = Vect((0, 0, 1))$ et c'est une base de E_{-2}.

Base de E_1: Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} u \in E_1 &\iff (A - I_3)u = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ -4x - 2y &= 0 \\ 4x - 8y - 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -10y - 3z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -\frac{1}{2}y = \frac{3}{20}z \\ y &= -\frac{3}{10}z \end{cases} \\ &\iff u = (\frac{3}{20}z, -\frac{3}{10}z, z) \in Vect((\frac{3}{20}, -\frac{3}{10}, 1)) \end{aligned}$$

Donc $E_1 = Vect((\frac{3}{20}, -\frac{3}{10}, 1))$ et c'est une base de E_1.
Et ici, on voit que $\dim E_1 = 1 <$ multiplicité de la racine, donc la matrice n'est pas diagonalisable.

D'après la discussion sur les différentes formes de Jordan en dimension 3, il existe une base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons cette base. On doit donc avoir

$$\begin{cases} f(v_1) & = -2v_1 \\ f(v_2) & = v_2 \\ f(v_3) & = v_2 + v_3 \end{cases}$$

De là, on voit que v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre -2 : on peut donc prendre $v_1 = (0, 0, 1)$.
De même, v_2 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 donc on peut prendre $v_2 = (3, -6, 20)$ par exemple.
Et du coup, il ne reste plus qu'à déterminer v_3. Notons $v_3 = (x, y, z)$, on sait que $v_3$vérifie

$$\begin{aligned} f(v_3) = v_2 + v_3 &\iff f(v_3) - v_3 = v_2 \\ &\iff Av_3 - v_3 = v_2 \\ &\iff (A - I_3)v_3 = v_2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne le système

$$\begin{aligned} (A - I_3)v_3 = v_2 &\iff \begin{cases} 2x + y & = 3 \\ -4x - 2y & = -6 \\ 4x - 8y - 3z & = 20 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x + y & = 3 \\ 0 & = 0 \\ -10y - 3z & = 14 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x & = \frac{1}{2}(3 - y) = \frac{16+3z}{20} \\ y & = \frac{14-3z}{10} \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant, par exemple, $z = 0$, on trouve que $v_3 = (\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 0)$ convient.
On a donc

$$T = P^{-1}AP, \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \frac{4}{5} \\ 0 & -6 & \frac{7}{5} \\ 1 & 20 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

Considérons maintenant l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1-\lambda & 1 \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(\lambda(\lambda-1) - (\lambda+1)) + 2(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(\lambda(\lambda-1) - (\lambda+1) + 2) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1-\lambda)^3
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Le polynôme caractéristique de g est scindé. Il y a une valeur propre triple 1.
Détemrinons une base du sous-espace propre associé.

Base de E_1: Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alor

$$\begin{aligned}
u \in E_1 &\iff (B - I_3)u = 0_{\mathbb{R}^3} \\
&\iff \begin{cases} -2y - 2z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y + z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x - 2z &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 2z \\ y &= -z \end{cases} \\
&\iff u = (2z, -z, z) \in Vect((2, -1, 1))
\end{aligned}$$

Donc $E_1 = Vect((2, -1, 1))$ et c'est une base de E_1.
Et ici, on voit que $\dim E_1 = 1 <$ multiplicité de la racine, donc la matrice n'est pas diagonalisable.

D'après la discussion sur les formes réduites de Jordan, il existe une base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}'$ soit

$$Mat_{\mathcal{B}'}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchons cette base. On doit donc avoir

$$\begin{cases} f(v_1) &= v_1 \\ f(v_2) &= v_1 + v_2 \\ f(v_3) &= v_2 + v_3 \end{cases}$$

De là, on voit que v_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 : on peut donc prendre $v_1 = (-2, 1, 1)$.
Déterminons v_2 Notons $v_2 = (x, y, z)$, on sait que $v_2$vérifie

$$\begin{aligned}
g(v_2) = v_1 + v_2 &\iff g(v_2) - v_2 = v_1 \\
&\iff Bv_2 - v_2 = v_1 \\
&\iff (B - I_3)v_2 = v_1
\end{aligned}$$

ce qui nous donne un système

$$(B-I_3)v_2 = v_1 \iff \begin{cases} -2y-2z & = -2 \\ y+z & = 1 \\ x+y-z & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y+z & = 1 \\ 0 & = 0 \\ x-2z & = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = 2z \\ y & = 1-z \end{cases}$$

Par exemple, pour $z=0$ on trouve que $v_2 = (0,0,1)$ convient.

Et du coup, il ne reste plus qu'à déterminer v_3. Notons $v_3 = (x,y,z)$, on sait que $v_3$vérifie

$$\begin{aligned} g(v_3) = v_2 + v_3 &\iff f(v_3) - v_3 = v_2 \\ &\iff Bv_3 - v_3 = v_2 \\ &\iff (B-I_3)v_3 = v_2 \end{aligned}$$

ce qui nous donne le système

$$(B-I_3)v_2 = v_1 \iff \begin{cases} -2y-2z & = 0 \\ y+z & = 0 \\ x+y-z & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y+z & = 0 \\ 0 & = 0 \\ x-2z & = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = 1+2z \\ y & = -z \end{cases}$$

En prenant, par exemple, $z=0$, on trouve que $v_3 = (1,0,0)$ convient.
On vérifie que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\det(v_1,v_2,v_3) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ C'est bon ! On a donc

$$T = P^{-1}AP, \text{ où } P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$