Procédé de Gram-Schmidt

April 2, 2022

On travaille dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ (on dit aussi que E est un espace euclidien).

Le procédé de Gram-Schmidt sert à trouver des bases orthonormées d'un e.v. ou d'un s.e.v. quand on connaît déjà une base quelconque.

Rappelons, au cas où, qu'une famille de vecteurs $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est orthonormée si

- C'est une famille orthogonale: autrement dit les vecteurs sont deux à deux orthogonaux
$$\forall i \neq j,\ \langle e_i, e_j \rangle = 0$$
- Tous les vecteurs sont de norme 1: pour tout $i, \|e_i\| = \sqrt{\langle e_i, e_i \rangle} = 1$

$\rightsquigarrow$ L'intérêt, c'est que les bases orthonormales sont très faciles à utiliser.

- Par exemple, si $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de E , et $u \in E$ est un vecteur quelconque, alors il doit avoir des coordonnées $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dans la base $\mathscr{B}$,c'est-à-dire des scalaires tels que
$$u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$$
Normalement, pour les trouver, il faut résoudre un système, mais en fait, comme $\mathscr{B}$ est orthonormée, on a, pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$\begin{aligned} \langle u, e_i \rangle &= \langle \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, e_i \rangle, \text{ donc, par bilinéarité,} \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle e_1, e_i \rangle}_{=0} + \ldots + \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle}_{=1} + \ldots + \lambda_n \underbrace{\langle e_1, e_n \rangle}_{=0} \\ &= \lambda_i \end{aligned}$$
donc il suffit de calculer le produit scalaire de u avec chacun des e_i pour trouver les coordonnées de u dans cette base.
- Si F est un s.e.v de E et $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base orthonormée de F, on peut trouver facilement le projeté orthogonal d'un vecteur u sur F, ce qui donne le vecteur de F qui est à distance minimale de u :
$$p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle e_i$$

Or, trouver le vecteur de F qui est le plus proche de u est extrêmement utile: c'est ce qui est à la base des méthodes des moindres carrés en statistiques, par exemple.

Donc, comment obtenir une de ces merveilleuses bases orthonormées ?

$\leadsto$ C'est à ça que sert Gram-Schmidt. On va partir d'une base de l'e.v. E ou d'un s.e.v F

$$\mathscr{B} = \{u_1, \dots, u_p\}$$

et on va en déduire une base orthonormée

$$\mathscr{B}' = \{v_1, \dots, v_p\}$$

Pour cela, on va procéder par récurrence: à chaque étape, on va construire le vecteur v_j à partir des vecteurs précédents $v_1, \dots, v_{j-1}$ et du vecteur u_j, en faisant en sorte que

1. v_j est de norme 1
2. v_j est orthogonal à tous les vecteurs précédents $v_1, \dots, v_{j-1}$
3. Vect$(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j)$ =Vect$(v_1, \dots, v_{j-1}, u_j)$, car si on fait ça, tout vecteur v de Vect$(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j)$ s'écritv

   $$v = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1}}_{\in \text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_{j-1})} + \lambda_j u_j$$

   or par récurrence, Vect $(v_1, \dots, v_{j-1}) =$ Vect $(v_1, \dots, u_{j-1})$ donc

   $$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} = \underbrace{\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{j-2} v_{j-2}}_{\text{Vect}\,(v_1, \ldots, v_{j-2})} + \mu_{j-1} u_{j-1}$$

   et de proche en proche, on va obtenir que v est une combinaison linéaire de $u_1, \dots, u_j$. Autrement dit

   $$\text{Vect}\,(v_1, \dots, v_{j-1}, v_j) = \text{Vect}\,(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j)$$

   Du coup, à la fin, on aura Vect $(v_1, \dots, v_p)$ $=$ Vect $(u_1, \dots, u_p)$ donc $\{v_1, \dots, v_p\}$ sera bien une base de E (ou de F).

Maintenant qu'on sait ce qu'on veut, y a plus qu'à.

Etape 1: ($k = 1$). Construisons v_1. Pour la condition 2, il n'y a rien à faire: il n'y a pas de vecteurs précédents. On veut donc simplement v_1 de norme 1 tel que Vect $(v_1) =$ Vect (u_1), donc en particulier $v_1 \in$ Vect (u_1),c'est-à-dire $v_1 = \lambda_1 u_1$. Plus qu'à trouver λ_1, or on veut

$$1 = \|v_1\| = |\lambda_1| \|u_1\|$$

$\rightsquigarrow$ il suffit de prendre $\lambda_1 = \frac{1}{\|u_1\|}$, d'où

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Etape 2: Construisons v_2. On va le faire en deux sous-étapes, en remarquant que si on trouve un vecteur w_2 qui vérifie les conditions 2. et 3., on pourra poser $v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$: dans ce cas on a bien[1]

$$\begin{cases} \|v_2\| = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 & = 1 \\ \langle v_2, v_1 \rangle = \frac{1}{\|w_2\|} \langle w_2, v_1 \rangle & = 0 \\ \mathrm{Vect}\,(v_2, v_1) = \mathrm{Vect}\,(w_2, v_1) & = \mathrm{Vect}\,(v_1, u_2) \end{cases}$$

Commençons donc par chercher un vecteur w_2 qui vérifie 2. et 3. On veut donc, en particulier, que $w_2 \in \mathrm{Vect}\,(v_1, u_2)$:

$$w_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 u_2$$

de plus, $\alpha_2 \neq 0$, car sinon w_2 serait colinéaire à v_1 et $\{w_2, v_1\}$ serait liée, ce qui est embêtant, vu qu'on veut une base. Donc on peut diviser par α_2 et chercher w_2 sous la forme

$$w_2 = \alpha v_1 + u_2$$

Plus qu'à trouver α , et pour ça, on utilise la condition 2. On veut que $\langle w_2, v_1 \rangle = 0$ donc

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_2, v_1 \rangle &= \langle \alpha v_1 + u_2, v_1 \rangle \\ &= \alpha \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=\|v_1\|^2=1} + \langle u_2, v_1 \rangle \\ &= \alpha + \langle u_2, v_1 \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne $\alpha = -\langle u_2, v_1 \rangle$. On prend donc

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 \text{ et } v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

ce qui termine l'étape 2.

Etape j: (là, on fait une vraie récurrence) Supposons qu'on a construit $(v_1, \ldots, v_{j-1})$ et construisons v_j.

A nouveau, on va le faire en deux sous-étapes, car si on trouve un vecteur w_j qui vérifie les conditions 2. et 3., on pourra comme précédemment poser $v_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}$ pour avoir

$$\begin{cases} \|v_j\| = \frac{1}{\|w_j\|} w_j & = 1 \\ \forall i < j,\ \langle v_j, v_i \rangle = \frac{1}{\|w_j\|} \langle w_j, v_i \rangle & = 0 \\ \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots v_j) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots w_j) & = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots u_j) \end{cases}$$

[1] Le dernier point est vrai car dans toute combinaison linéaire faisant intervenir un λv_2 , on peut le remplacer par $\frac{\lambda}{\|w_2\|} w_2$

Commençons donc par chercher un vecteur w_j qui vérifie 2. et 3. On veut donc, en particulier, que $w_j \in \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_{j-1}, u_j)$:

$$w_j = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \alpha_j u_j$$

De plus, $\alpha_j \neq 0$, car sinon w_j serait combinaison linéaire des $v_1, \ldots, v_{j-1}$ $\{v_1, \ldots, v_{j-1}, w_j\}$ serait liée. Donc on peut tout diviser par α_j et chercher un w_j de la forme

$$w_j = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + u_j$$

Plus qu'à trouver les λ_j , en utilisant la condition 2. On veut que pour $i = 1....j-1$, $\langle w_j, v_i \rangle = 0$. Or les v_i ,pour $i = 1, \ldots j-1$, sont orthogonaux entre eux, donc

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_j, v_1 \rangle &= \langle \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + u_j, v_1 \rangle \\ &= \lambda_1 \underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{=\|v_1\|^2=1} + \lambda_2 \underbrace{\langle v_2, v_1 \rangle}_{=0} + \ldots + \lambda_{j-1} \underbrace{\langle v_{j-1}, v_1 \rangle}_{=0} + \langle u_j, v_1 \rangle \\ &= \lambda_1 + \langle u_j, v_1 \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne $\lambda_1 = -\langle u_j, v_1 \rangle$. Pour les autres, on trouve, en faisant le même raisonnement $\lambda_i = -\langle u_j, v_i \rangle$ donc

$$w_j = u_j - \langle v_1, u_j \rangle v_1 - \langle v_2, u_j \rangle v_2 - ... - \langle v_{j-1} u_j \rangle v_{j-1} \text{ et } v_j = \frac{w_j}{\|w_j\|}.$$

Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire habituel, construisons une base orthonormée de

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$$

D'abord, il nous faut une base de F. Or, pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} u \in F &\iff x + y + z + t = 0 \\ &\iff x = -y - z - t \\ &\iff u = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1)) \\ &\iff u \in \mathrm{Vect}\,((-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)) \end{aligned}$$

donc la famille $\{u_1 = (-1, 1, 0, 0), u_2 = (-1, 0, 1, 0), u_3 = (-1, 0, 0, 1)\}$ est uen famille génératrice de F. Je vous laisse vérifier qu'elle est libre, et que c'est donc une base de F.

Gram-Schmidtons-la donc.

- Etape 1: on calcule $\|u_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{2}$ et on pose

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$$

- Etape 2: on commence par déterminer le vecteur intermédiaire w_2, donné par
$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1$$
or $\langle u_2, v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle u_2, u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où
$$w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
et de là, on calcule $\|w_2\| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui donne
$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Etape 3: A nouveau, on commence par le vecteur intermédiaire w_3 :
$$w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2$$
or
$$\begin{cases} \langle u_3, v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}((-1) * (-1) + 0 * 1 + 0 * 0 + 1 * 0) & = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \langle u_3, v_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}}((-1) * 1 + 0 * 1 + 0 * (-1) + 1 * 0) & = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$
d'où
$$w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
Et pour obtenir v_3 on calcule $\|w_3\| = \frac{1}{6}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 6^2} = \frac{\sqrt{42}}{6}$, ce qui donne
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- On peut vérifier !
$$\begin{cases} \langle v_1, v_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}((-1) * 1 + 1 * 1 + 0 * (-1) + 0 * 0) & = 0 \\ \langle v_1, v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{84}}((-1) * (-1) + 1 * (-1) + 0 * (-2) + 6 * 0) & = 0 \\ \langle v_2, v_3\rangle = -\frac{1}{\sqrt{32}}(1 * (-1) + 1 * (-1) + (-1) * (-2) + 6 * 0) & = 0 \end{cases}$$