Compléments d'analyse/Compléments/"english.cfg"

Exercice 1 - Complément: Les applications bilinéaires continues et quadratiques sont $\mathscr{C}^1$.

On a obtenu qu'une application bilinéaire continue $f : E \times E \to F$ est différentiable en tout point de $E \times E$, et sa différentielle est donnée par

$$Df(a_1, a_2)(h_1, h_2) = f(a_1, h_2) - f(h_1, a_2).$$

Montrons que f est continûment différentiable, c'est à dire que l'application

$$\begin{aligned} Df : E \times E &\to \mathcal{L}(E \times E, F) \\ (a_1, a_2) &\mapsto Df(a_1, a_2) \end{aligned}$$

est continue. On remarque que, pour tous $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in E \times E$,on a, pour tout $h = (h_1, h_2) \in E \times E$

$$\begin{aligned} (Df(a_1, a_2) - Df(b_1, b_2))(h_1,h_2) &= f(a_1, h_2) - f(h_1, a_2) - (f(b_1, h_2) - f(h_1, b_2)) \\ &= f(a_1 - b_1, h_2) - f(h_1, a_2 - b_2) \end{aligned}$$

donc

$$||(Df(a_1, a_2) - Df(b_1, b_2))(h_1,h_2)||_F \leq ||f(a_1 - b_1, h_2)||_F + ||f(h_1, a_2 - b_2)||_F$$

Par continuité de f,on sait qu'il existe $c > 0$ telle que

$$\begin{aligned} ||f(a_1 - b_1, h_2)||_F &\leq c||a_1 - b_1||_E||h_2||_E \\ ||f(h_1, a_2 - b_2)||_F &\leq c||h_1||_E||a_2 - b_2||_E \end{aligned}$$

Et, $E \times E$ étant muni d'une des normes produit, on a

$$\begin{aligned} ||a_1 - b_1||_E||h_2||_E &\leq ||a - b||_{E\times E}||h||_{E\times E} \\ ||h_1||_E||a_2 - b_2||_E &\leq ||a - b||_{E\times E}||h||_{E\times E} \end{aligned}$$

d'où pour tout $h = (h_1, h_2) \in E \times E$

$$||(Df(a_1, a_2) - Df(b_1, b_2))(h_1,h_2)||_F \leq 2c||a - b||_{E\times E}||h||_{E\times E}$$

donc, par définition de la norme d'applications linéaires sur $\mathcal{L}(E \times E, F)$,

$$||(Df(a_1, a_2) - Df(b_1, b_2))||_{\mathcal{L}(E\times E,F)} \leq 2c||a - b||_{E\times E}$$

Autrement dit, l'application Df est Lipschitzienne, donc continue, sur $E\times E$